विध्न विचारत भीरु जन, नहीं आरम्भे काम,
विपति देख छोड़े तुरंत मध्यम मन कर श्याम।
पुरुष सिंह संकल्प कर, सहते विपति अनेक,
'बना' न छोड़े ध्येय को, रघुबर राखे टेक।।

रचितः मानव धर्म प्रणेता

सद्गुरु श्री रणछोड़दासजी महाराज

आव्यूह एवं सारणिक (Matrices and determinants)

As for ecerything else, so for a mathematical theory,
Beauty can be perceived but not explaind……. Caylay Arhtur

पंक्ति और स्तम्भ में किसी सुनिष्चित कम से व्यवस्थित संखऐं, जो आयताकार व्यूह में लिखी हो, मैट्रिक्स या आव्यूह कहलाती हैं।

आव्यूह का कम : यदि किसी आव्यूह में M पंक्तियॉ तथा n स्तम्भ हो तो आव्यूह का कम $m \times n$ लिखा जाता है तथा (m by n) कम का आव्यूह कहलाता है।

सामान्य रूप में $m \times n$ कमा का आव्यूह निम्न प्रकार से व्यक्त किया जाता है –

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i1} & a_{i3} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

जहॉ a_{ij} अवयव, मैट्रिक्स A की i वी पंक्ति और j वें स्तम्भ को प्रदर्षित करता हैं। इसे हम $[a_{ij}]_{m \times n}$ से प्रदर्षित करते हैं।

नोट :
(i) अवयव a_{11}, a_{22}, a_{33},…….. विकर्ण अवयव कहलाते हैं और उनका योगफल **A** का ट्रेस (Trace) कहलाता है, जिसे $T_r(A)$ से प्रदर्षित करते हैं।
(ii) मैट्रिक्स को अंग्रेजी वर्णमाला के बड़े अक्षरों से व्यक्त किया जाता हैं।
(iii) आव्यूह का कम : यदि किसी आव्यूह में m पंक्तियॉ तथा n स्तम्भ हो तो आव्यूह का कम $m \times n$ लिखा जाता है तथा (m by n) कम का आव्यूह कहलाता है।

पंक्ति मैट्रिक्स (Row matrix) :

मैट्रिक्स जिसमें केवल एक ही पंक्ति हो, पंक्ति मैट्रिक्स कहलाता है। पंक्ति मैट्रिक्स को $A=[a_{11}, a_{12}, a_{13}, \dots A_{1n}]$ से प्रदर्षित किया जाता हैं।

इस आव्यूह का कम "$1 \times n$" है। (या एक n कम की पंक्ति आव्यूह)

स्तम्भ मैट्रिक्स (Column matrix) :

वह मैट्रिक्स जिसमें केवल एक ही स्तम्भ हो, स्तम्भ मैट्रिक्स कहलाती हैं। स्तम्भ मैट्रिक्स को $A = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m1} \end{bmatrix}$ से प्रदर्षित किया जाता है।

इस आव्यूह का कम "$m \times 1$" है। (या एक m कम की स्तम्भ आव्यूह)

वर्ग मैट्रिक्स (Square matrix) :

मैट्रिक्स जिसमें पंक्तियों और स्तम्भों की संख्या बराबर होती है, वर्ग मैट्रिक्स कहलाता है। समान्य रूप मे वर्ग मैट्रिक्स

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots\ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots\ldots & a_{2n} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots\ldots & a_{nn} \end{bmatrix}$$ होता है जिसे $A[a_{ij}]_n$ से प्रदर्षित करते हैं।

इस आव्यूह का क्रम "$n \times n$" है। (या एक n क्रम की वर्ग आव्यूह)

शून्य मैट्रिक्स (Zero matrix) :

$A=[a_{ij}]_{m \times n}$ शून्य मैट्रिक्स कहलाती है यदि $a_{ij}=0$ $\forall$I एवं j.

e.g. : (i) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

ऊपरी त्रिभुजाकार मैट्रिक्स (Upper triangular matrix) :

यदि $A=[a_{ij}]_{m \times n}$ में $i>j$ के लिए $a_{ij}=0$ (अग्रग विकर्ण के नीचे के सभी अवयव शून्य हो) हो तो मैट्रिक्स, ऊपरी त्रिभुजाकार मैट्रिक्स कहलाता है।

e.g. : (i) $\begin{bmatrix} a & b & c & d \\ 0 & x & y & z \\ 0 & 0 & u & v \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & x & y \\ 0 & 0 & z \end{bmatrix}$

निम्न त्रिभुजाकार मैट्रिक्स (Lower triangular matrix) :

यदि $A=[a_{ij}]_{m \times n}$ में $i>j$ के लिए $a_{ij}=0$ (अग्रग विकर्ण के उपर के सभी अवयव शून्य हो) हो तो मैट्रिक्स निम्न त्रिभुजाकार मैट्रिक्स कहलाता हैं।

e.g. : (i) $\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ b & c & 0 \\ x & y & z \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ b & c & 0 & 0 \\ x & y & z & 0 \end{bmatrix}$

विकर्ण मैट्रिक्स (Diagonal matrix) :

वह वर्ग मैट्रिक्स $[a_{ij}]_n$ जिसमें अग्रग मुख्य विकर्ण के अतिरिक्त शेष अवयव शून्य हो, अर्थात् $a_{ij}=0$ यदि $i \neq j$ (अर्थात् वर्ग आव्यूह के विकर्ण के अलाववा अवयव शून्य हों)

नोट : n क्रम की विकर्ण मैट्रिक्स को Dig(a_{11}, a_{22}, ... a_{nn}) से प्रदर्षित किया जाता हैं।

e.g. : (i) $\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c \end{bmatrix}$

अदिष मैट्रिक्स (Scalar matrix) :

वह विकर्ण मैट्रिक्स जिसमें अग्रग विकर्ण के सभी अवयव समान हों, अदिष मैट्रिक्स कहलाता है। अर्थात् $A=[a_{ij}]_n$ में

$\begin{cases} a_{ij} = 0; & \text{if } i \neq j \\ a_{ij} = k; & \text{if } i = j \end{cases}$ हो तो A एक अदिष मैट्रिक्स होगी।

e.g. : (i) $\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}$

इकाई मैट्रिक्स (तत्समक मैट्रिक्स) (Identity matrix) :

वह विकर्ण मैट्रिक्स जिसके अग्रग विकर्ण के सभी अवयव इकाई (1) हो, इकाई मैट्रिक्स कहलाती है। n कम के इकाई मैट्रिक्स को I_n या I से निरूपित करते हैं।

अर्थात् $A=[a_{ij}]_n$ एक इकाई मैट्रिक्स होगी यदि $\begin{cases} a_{ij}=0; & \text{if } i \neq j \\ a_{ij}=1; & \text{if } i=j \end{cases}$

eg. $I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

तुलनात्मक मैट्रिक्स (Comparable matrices) :

दो मैट्रिक्स A और B को तुलनात्मक कहा जाता है, यदि उनका कम समान है। (अर्थात् A और B में पंक्तियों और स्तम्भों की संख्या परस्पर बराबर हैं।)

e.g. : (i) $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ & $B = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ तुलनात्मक आव्यूह हैं।

e.g. : (ii) $C = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ & $D = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ तुलनात्मक आव्यूह नहीं हैं।

आव्यूह की समानता (Equality of matrices) :

दो मैट्रिक्स A और B को समान कहा जाता है, यदि वे तुलनात्मक हैं और उनके सभी संगत अवयव बराबर हैं।

माना $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ & $B=[b_{ij}]_{p\times q}$

A=B यदि और केवल यदि (i) $m=p,\ n=q$

(ii) $a_{ij}=b_{ij}\ \forall\ i\ \&\ j$

मैट्रिक्स का एक अदिष संख्या से गुणा (Multiplication of matrix by a scalar) :

माना λ एक अदिष हैं (वास्तविक या सम्मिश्र संख्या) और $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ एक मैट्रिक्स है, तो गुणना λA को निम्न प्रकार से परिभाषित किया जाता हैं। $\lambda A=[b_{ij}]_{m\times n}$ जहाँ $b_{ij}=\lambda a_{ij}\ \forall\ i\ \&\ j$.

e.g, : $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{bmatrix}$ & $-3A \equiv (-3)A = \begin{bmatrix} -6 & 3 & -9 & -15 \\ 0 & -6 & -3 & 9 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \end{bmatrix}$

नोट : यदि A अदिष मैट्रिक्स है, तब $A=\lambda I$, जहाँ λ मैट्रिक्स A का विकर्ण अवयव हैं।

मैट्रिक्स का योग (Addition of matrices) :

माना A और B समान कम की दो मैट्रिक्स हैं, (अर्थात् तुलनात्मक मैट्रिक्स) तो A+B को निम्न प्रकार परिभाषित किया जाता हैं।

$A+B = [a_{ij}]_{m\times n}+=[b_{ij}]_{m\times n}$

$= [c_{ij}]_{m\times n}$ जहाँ $c_{ij}=a_{ij}=b_{ij}\ \forall\ i$ और j.

e.g. : $A=\begin{bmatrix}1 & -1\\2 & 3\\1 & 0\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}-1 & 2\\-2 & -3\\5 & 7\end{bmatrix}$, $A+B=\begin{bmatrix}0 & 1\\0 & 0\\6 & 7\end{bmatrix}$

मैट्रिक्स का व्यवकलन (Substraction of matrices) :

माना A और B दो समान क्रम के मैट्रिक्स हैं, तो A – B को A+(-B) से परिभाषित किया जाता हैं, जहाँ -B,(-1)B हैं।

मैट्रिक्स के योग और अदिष गुणन के गुणधर्म (Properties of addition & scalar multiplication) :

माना $M_{m\times n}(F)$, $m\times n$ क्रम की सभी मैट्रिक्सों जिनके अवयव समुच्चय F से सम्बद्ध हैं, (जबकि $F\to Q,R$ या C को प्रदर्षित करता हैं) के समुच्चय को बताता है तो

(a) $A\in M_{m\times n}(F)$ & $B\in M_{m\times n}(F) \Rightarrow A+B\in M_{m\times n}(F)$
(b) $A+B=B+A$
(c) $(A+B)+C=A+(B+C)$
(d) $O=[o]_{m\times n}$ योज्य तत्समक हैं।
(e) प्रत्येक $A\in M_{m\times n}(F)$ के लिए, $-A$ योज्य प्रतिलोम हैं।
(f) $\lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B$
(g) $\lambda A=A\lambda$
(h) $(\lambda_1+\lambda_2)A=\lambda_1 A+\lambda_2 A$

मैट्रिक्स का गुणन (Multiplication of matrices) :

माना A और B दो मैट्रिक्स इस प्रकार है कि A में स्तम्भों की संख्या B में पंक्तियों की संख्या के बराबर हैं।
अतः $A=[a_{ij}]_{m\times p}$ और $B=[b_{ij}]_{p\times n}$

तो $AB=[c_{ij}]_{m\times n}$ जहाँ $c_{ij}=\sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj}$ जो A के i^{th} पंक्ति सदिष और B के j^{th} स्तम्भ सदिष का बिन्दु गुणन हैं।

e.g. : $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\2 & 3 & 1\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}0 & 1 & 1 & 1\\0 & 0 & 1 & 0\\1 & 1 & 2 & 0\end{bmatrix}$, $AB=\begin{bmatrix}3 & 4 & 9 & 1\\1 & 3 & 7 & 2\end{bmatrix}$

नोट :
(1) AB परिभाषित होगा यदि और केवल यदि A के स्तम्भों की संख्या B की पंक्तियों के बराबर हैं। मैट्रिक्स गुणन AB में A को पूर्व पद एवं B को उत्तर पद कहते हैं। AB परिभाषित हैं $\neq$BA परिभाषित हैं।
(2) सामान्यतः $AB\neq BA$, जबकि दोनों गुणन परिभाषित हैं।
(3) A (BC)=(AB) C, जब यह परिभाषित हैं।

मैट्रिक्स गुणन के गुणधर्म (Properties of matrix multiplication) :

माना $M_n(F)$,n क्रम की सभी वर्ग मैट्रिक्सों के समुच्चय को प्रदर्षित करता हैं। (जहाँ $F\to Q$, R या C हैं) तो

(a) $A,B\in M_n(F) \Rightarrow AB\in M_n(F)$
(b) सामान्यतः $AB\neq BA$
(c) $(AB)C=A(BC)$
(d) मैट्रिक्स गुणन में I_n, (nक्रम की इकाई मैट्रिक्स), गुणन तत्समक का कार्य करती हैं।
$AI_n=A=I_nA \quad \forall A\in M_n(F)$
(e) $M_n(F)$ प्रत्येक व्युत्क्रमणीय मैट्रिक्स $A\in M_n(F)$ के लिए (i.e., $|A|\neq 0$) एक अद्वितिय मैट्रिक्स $B\in M_n(F)$ इस प्रकार है कि $AB=I_nBA$ इस स्थिति में यह कहा जाता हैं कि A और B एक दूसरे के गुणन प्रतिलोम हैं। प्रतीकात्मक रूप में – $B=A^{-1}$ या $A=B^{-1}$.
(f) यदि λ अदिष हैं $(\lambda A)B=\lambda(AB)=A(\lambda B)$.
(g) $A(B+C)=AB+AC \quad \forall A,B,C\in M_n(F)$

(h) (A+B)C=AC+BC $\forall A,B,C \in M_n(F)$.

नोट : (1) माना $A=[a_{ij}]_{m\times n}$, तब $AI_n=A$ और $I_mA=A$, जहाँ I_n एवं I_m क्रमषः n और m क्रम की इकाई मैट्रिक्स हैं।
(2) एक वर्ग मैट्रिक्स A के लिए, $A^2=A.A$, $A^3=A.A.A$ आदि।

मैट्रिक्स का परिवर्त (Transpose of a matrix) :

यदि $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ हो, तो A का परिवर्त A'(या A^T) से प्रदर्षित किया जाता है और $A'=[b_{ij}]_{n\times m}$ से परिभाषित किया जाता है जहाँ $b_{ij}=a_{ji}$ $\forall$ i और j.

अर्थात् A' को A की सभी पंक्तियों को स्तम्भों के रूप में दुबारा लिखकर (या A के सभी स्तम्भों को पंक्तियों के रूप में लिखकर) प्राप्त किया जाता है।

e.g. : $A=\begin{bmatrix}1&2&3&4\\a&b&c&d\\x&y&z&w\end{bmatrix}$, $A'=\begin{bmatrix}1&a&x\\2&b&y\\3&c&z\\4&d&w\end{bmatrix}$

परिणाम :

(i) किसी मैट्रिक्स $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ के लिए, $(A')'=A$

(ii) माना λ अदिष है और A एक मैट्रिक्स है, तो $(\lambda A)'=\lambda A'$

(iii) दो तुलनात्मक मैट्रिक्स A एवं B के लिए $(A+B)'=A+B'$&$(A-B)'=A'-B'$

(iv) $(A_1\pm A_2.....\pm A_n)'=A_1'\pm A_2'\pm.....\pm A_n'$, जहाँ A_i तुलनात्मक है।

(v) माना $A=[a_{ij}]_{m\times p}$ और $B=[b_{ij}]_{p\times n}$, तब $(AB)'=B'A'$

(vi) $(A_1A_2......A_n)'=A_n'.A_{n-1}'.........A_2'.A_1'$, जबकि गुणनफल परिभाषित हो।

सममित और विषम मैट्रिक्स (symmetric & skew symmetric matrix):

एक वर्ग मैट्रिक्स A सममित मैट्रिक्स कहलाती है, यदि A'=A
अर्थात् माना $A=[a_{ij}]_n$ हो, तो A सममित मैट्रिक्स होगा यदि और केवल यदि $a_{ij}=a_{ij}$ $\forall$i एवं j. एक वर्ग मैट्रिक्स A विषय सममित होगा, यदि A'= -A
अर्थात् माना $A=[a_{ij}]_n$ हो, तो A विषम सममित होगा यदि और केवल यदि $a_{ij}=-a_{ij}$ $\forall$i एवं j.

e.g. $A=\begin{bmatrix}a&h&g\\h&b&f\\g&f&c\end{bmatrix}$ एक सममित मैट्रिक्स है। $B=\begin{bmatrix}o&x&y\\-x&o&z\\-y&-z&0\end{bmatrix}$ एक विषम सममित मैट्रिक्स है।

नोट : (1) किसी विषम सममित मैट्रिक्स में विकर्ण के सभी अवयव शून्य होते हैं $(\because a_{ii}=-a_{ii}\Rightarrow a_{ii}=0)$
(2) किसी वर्ग मैट्रिक्स A के लिए A+A' सममित होता है और A-A' विषम सममित होता हैं।
(3) प्रत्येक वर्ग मैट्रिक्स को अद्वितीय रूप से दो मैट्रिक्सों के योगफल के रूप में व्यक्त किया जा सकता है, जिनमें से एक सममित होता है ओर दूसरा विषम सममित होता है।
A=B+C, जहाँ $B=\frac{1}{2}(A+A')$ और $C=\frac{1}{2}(A-A')$.

उपमैट्रिक्स (Submatrix) :

माना A एक दिया गया मैट्रिक्स है, तो वह मैट्रिक्स जिसे A की कुछ पंक्तियों या स्तम्भों को हटाकरर प्राप्त किया जाता है, मैट्रिक्स 'A' का उपमैट्रिक्स कहलाता है।

e.g. $A = \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ x & y & z & w \\ p & q & r & s \end{bmatrix}$

तब $\begin{bmatrix} a & c \\ x & z \\ p & r \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a & b & d \\ p & q & s \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ p & q & r \end{bmatrix}$ सभी A के उपमैट्रिक्स हैं।

वर्ग मैट्रिक्स का सारणिक (Determinant of a square matrix):

माना $A=[a]_{1\times1}$ एक 1×1 मैट्रिक्स है, तो सारणिक A को $|A|=a$ से परिभाषित किया जाता है।

e.g. $A=[-3]_{1\times1}$ $|A|=-3$

माना $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, तब $|A|$ को ad-bc से परिभाषित किया जाता है।

e.g. $A = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$, $|A|=23$

उपसारणिक एव सहखण्ड (Minors & Cofactors):

माना Δ एक सारणिक है तो अवयव a_{ij} का उपसारणिक M_{ij} से दिया जाता है और यह, मैट्रिक्स A के j^{th} पंक्ति j^{th} स्तम्भ को हटाने से प्राप्त उपमैट्रिक्स के सारणिक के रूप में परिभाषित किया जाता है। इसी प्रकार अवयव a_{ij} का सहखण्ड c_{ij} या A_{ij} से दिया जाता है जो निम्न रूप में परिभाषित होता है –

$C_{ij}=(-1)^{i+j} M_{ij}$.

e.g.1 $A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$

$M_{11}=d=C_{11}$

$M_{12}=c,\ C_{12}= -c$

$M_{21}=b, C_{21}= -b$

$M_{22}=a=C_{22}$

e.g. 2 $\Delta = \begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix}$

$$M_{11} = \begin{vmatrix} q & r \\ y & z \end{vmatrix} = qz - yr = C_{11}.$$

$$M_{23} = \begin{vmatrix} a & b \\ x & y \end{vmatrix} = ay - bx, C_{23} = -(ay - bx) = bx - ay \text{ etc.}$$

किसी कम का सारणिक (Determinant of any order) :

माना $A=[a_{ij}]_n$ एक वर्ग मैट्रिक्स है $(n>1)$ । A का सारणिक किसी एक पंक्ति (या एक स्तम्भ के) के अवयवों के संगत सहगुणनखण्डों के साथ गुणनफलन के योग के बराबर होता है।

E.g. $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$

$|A|=a_{11}C_{11}+a_{12}+C_{12}+a_{13}C_{13}$ (प्रथम पंक्ति का उपयोग करके).

$$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$|A|=a_{12}\,C_{12}+a_{22}C_{22}+a_{32}C_{32}$ (द्वितीय पंक्ति का उपयोग करके).

$$= a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{32}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}$$

परिवर्त सारणिक (transpose of a determinant) :

किसी सारणिक का परिवर्त सारणिक इसके संगत आव्यू हके परिवर्त सारणिक के बराबर होता है।

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \qquad \Rightarrow D^2 = \qquad \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

सारणिक के गुणधर्म (Properties of determinant) :

(1) किसी वर्ग मैट्रिक्स A के लिए |A| = |A'|
अर्थात् यदि किसी सारणिक में समस्त पंक्तियों को स्तम्भों में और स्तम्भों को पंक्तियों में बदल दें, तो सारणिक के मान में कोई परिवर्तन नहीं होता है।

अर्थात् $D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = D'$

(2) यदि किसी सारणिक में दो पंक्तियों या दो स्तम्भों को परस्पर बदल दिया जाये, तो सारणिक का संख्यात्मक मान वही रहता है, लेकिन उसका चिन्ह बदल जाता है।

माना $D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ एवं $D' = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ तो D'=-D.

(3) माना λ अदिष है, तो λ |A| को की |A| एक पंक्ति (या एक स्तम्भ) को λ से गुणा करके प्राप्त किया जा सकता है

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \qquad \text{तथा } E = \begin{vmatrix} Ka_1 & Kb_1 & Kc_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \qquad \text{तथा } E=KD$$

(4) $|\lambda A| = \lambda^n |A|$, जब $A=[a_{ij}]_n$.

(5) एक विषम क्रम की विषम सममितत सारणिक का मान शून्य होता है।

(6) यदि किसी सारणिक में किसी पंक्ति या स्तम्भ के सभी अवयव शून्य है, तो इसका मान शून्य होगा।

अर्थात् $D = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0.$

(7) यदि किसी सारणिक की दो पंक्तियों या दो स्तम्भ सर्वसम (या समानुपाती) हो, तो इसका मान शून्य होगा

अर्थात् $D = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0.$

(8) यदि किसी सारणिक में किसी पंक्ति या स्तमी का प्रत्येक अवयव दो संख्याओं का योग हो, तो उस सारणिक को उसी क्रम के दो सरणिकों के योग के रूप में व्यक्त किया जा सकता है।

$$\begin{vmatrix} a_1+x & b_1+y & c_1+z \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & y & z \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

(9) सारणिक की पंक्ति या स्तम्भ के प्रत्येक अवयव में, किसी अन्य पंक्ति या स्तम्भ के संगत अवयवों को किसी अचर से गुणा कर जोड़ने या पर सारणिक के मान में कोई परिवर्तन नहीं होता है।

अर्थात् $D_1 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ और $D_2 = \begin{vmatrix} a_1+ma_2 & b_1+mb_2 & c_1+mc_2 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3+na_1 & b_3+nb_1 & c_3+nc_1 \end{vmatrix}$. तब $D_2 = D_1$

(10) माना $A=[a_{ij}]_n$, किसी पंक्ति के अवयवों का किसी दूसरी पंक्ति के संगत सहगुणनखण्डों के साथ गुणनफलों का योग शून्य होता है। (इसी प्रकार स्तम्भ के लिए भी).

दो सारणिकों का गुणनफल (Multiplication of two determinants) : यदि A और B दो समान क्रम की वर्ग मैट्रिक्स है, तब |A|=|A| |B|.

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \ell_1 & m_1 \\ \ell_2 & m_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1\ell_1+b_1\ell_2 & a_1m_1+b_1m_2 \\ a_2\ell_1+b_2\ell_2 & a_2m_1+b_1m_2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \ell_1 & m_1 & n_1 \\ \ell_2 & m_2 & n_2 \\ \ell_3 & m_3 & n_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1\ell_1+b_1\ell_2+c_1\ell_3 & a_1m_1+b_1m_2+c_1m_3 & a_1n_1+b_1n_2+c_1n_3 \\ a_2\ell_1+b_2\ell_2+c_2\ell_3 & a_2m_1+b_2m_2+c_1m_3 & a_2n_1+b_2n_2+c_2n_3 \\ a_3\ell_1+b_3\ell_2+c_3\ell_3 & a_3m_1+b_3m_2+c_3m_3 & a_3n_1+b_3n_2+c_3n_3 \end{vmatrix}$$

नोट : जैसा कि |A|=|A'|, we have
|A||B|=|AB'| (पंक्ति–पंक्ति विधि)
|A| |B| = |A'B| (स्तम–स्तम्भ विधि)
|A| |B| = |AB'| (स्तम्भ–स्तम्भ विधि)

सारणिक का योग (Summation of determinants) :

माना $\Delta(r) = \begin{vmatrix} f(r) & g(r) & h(r) \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & a_2 & b_3 \end{vmatrix}$

जहाँ a_1,a_2,a_3,b_1,b_2,b_3 सभी r से स्वत्रन्त्र अचर हैं, तब

$$\sum_{r=1}^{n}\Delta(r) = \begin{vmatrix} \sum_{r=1}^{n} f(r) & \sum_{r=1}^{n} g(r) & \sum_{r=1}^{n} h(r) \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

यहाँ r का फलन केवल एक पंक्ति या स्तम्भ के अवयव ही हो सकते हैं, उस स्तम्भ या पंक्ति के अवयवों के अलावा अन्य r पर निर्भर नहीं होने चाहिए। यदि एक पंक्ति या स्तम्भ से ज्यादा के अवयव r पर निर्भर है, तो पहले सारणिक का प्रसार करते है और फिर योग करते है।

सारणिक का अवकलन (Differentiation of determinant) : माना $\Delta(x) = \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & f_3(x) \\ g_1(x) & g_2(x) & g_3(x) \\ h_1(x) & h_2(x) & h_3(x) \end{vmatrix}$

तब $\Delta'(x) = \begin{vmatrix} f'_1(x) & f'_2(x) & f'_3(x) \\ g_1(x) & g_2(x) & g_3(x) \\ h_1(x) & h_2(x) & h_3(x) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & f_3(x) \\ g'_1(x) & g'_2(x) & g'_3(x) \\ h_1(x) & h_2(x) & h_3(x) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & f_3(x) \\ g_1(x) & g_2(x) & g_3(x) \\ h'_1(x) & h'_2(x) & h'_3(x) \end{vmatrix}$

नोट : हम एक सारणिक को स्तम्भ से (column wise) भी अवकलन कर सकते हैं।

सारणिक का समाकलन (Integration of a determinant) :

माना $\Delta(x) = \begin{vmatrix} f(x) & g(x) & h(x) \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$

जहाँ a_1,b_1,c_1,a_2,b_2,c_2 सभी x स्वतन्त्र अचर है, अतः

$$\int_a^b \Delta(x)dx = \begin{vmatrix} \int_a^b f(x)dx & \int_a^b g(x)dx & \int_a^b h(x)dx \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

नोट : यदि एक से ज्यादा पंक्ति या स्तम्भ x के फलन हैं, तो पहले सारणिक काप्रसार करते है और फिर समाकलन करते है।

केमर नियमः रेखिक समीकरण निकाय (Cramer's Rule : System of linear equations) :

(i) **दो चर**

समीकरणों $a_1x+b_1y+c_1=0$ एवं $a_2x+b_2y+c_2=0$ के लिए यदि :

$\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} \neq \dfrac{c_1}{c_2}$ हो, तो दी गई समीकरणें असंगत है और यदि

$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$ हो, तो दी गई समीकरणें संगत हैं।

(ii) **तीन चर**

मानाकि

$$a_1x+b_1y+c_1z=d_1$$
$$a_2x+b_2y+c_2z=d_2$$
$$a_3x+b_3y+c_3z=d_3$$

तो, $D.x=D_1$, $D.y=D_2$, $D.z=D_3$

जहाँ $D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$; $D_1 = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$; $D_2 = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}$ & $D_3 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}$

एक समीकरण निकाय की संगठता (Consistency of a system of equations) :

(a) यदि $D \neq 0$ और D_1, D_2, D_3 में से कम से कम एक अशून्य हो, तो दिया गया समीकरण निकास संगत है और इसका अषून्य अद्विितीय हल होगा।

(b) यदि $D \neq 0$ एवं $D_1=D_2=D_3=0$ तो दिया गया समीकरण निकाय संगत है और इसका केवल एक शून्य हल होगा।

(c) यदि $D=D_1=D_2=D_3=0$ तब समीकरण निकाय के या तो अनन्त हल होंगे या कोई हल नहीं होगा।
(2×2 निकाय के लिए $D=0=D_1=D_2 \Leftrightarrow$ निकाय के अनन्त हल होगें)

(d) यदि $D=0$ परन्तु D_1, D_2, D_3 में से कम से कम एक शून्य नहीं हो, तब समीकरण निकास असंगत होता है तथा इसका कोई हल नहीं होता है।

D के सहखण्ड
- सभी शून्य है और
  - D_1, D_2,एवं D_3 के सभी सहखण्ड शून्य हो , तो निकाय के अनन्त हल होगे।
  - D_1, D_2, एवं D_3 के सभी सहखण्डों में से कम से कम एक सहखण्ड अशून्य हो, तो निकाय का कोई हल नही होगा
- कम से कम एक अशून्य है, तो निकाय के अनन्त हल होगे।

समघात निकय :

$$a_1x+b_1y+c_1z=0$$
$$a_2x+b_2y+c_2z=0$$
$$a_3x+b_3y+c_3z=0$$

$(x, y, z)=(0, 0, 0)$ इस निकाय का हल है यह हल निरर्थक (trival) हल है या शून्य हल है

$D \neq 0 \Rightarrow$ इस निकाय का केलव शून्य हल है

$D = 0 \Rightarrow$ इस निकाय का शून्य हल नहीं है (अनन्त हल)

दो चरों की सतीन समीकरणें (Three equation in two variables):

यदि x और y अशून्य हैं, तो समीकरण निकाय $a_1x+b_1y+c_1=0$; $a_2x+b_2y+c_2=0$ और $a_3x+b_3y+c_3=0$ के x और y में

सगत होने के लिए $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0.$

सारणिक के अनुप्रयोग (Application of determinants):

(i) त्रिभुज का क्षेत्रफल जिसके शीर्ष $(x_r, y_r); r=1, 2, 3$ है :

$$D = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$ यदि $D=0$ हो, तो तीनों बिन्दु संरेखीय हैं।

(ii) बिन्दु (x_1, y_1) और (x_2, y_2) से गुजरने वाली सरल रेखा का समीकरण $\begin{vmatrix} x_1 & y & z \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = 0$ होगा।

(iii) सरल रेखाएँ : $a_1x+b_1y+c_1=0$..........(1)

$a_2x+b_2y+c_2=0$..........(2)

$a_3x+b_3y+c3=0$..........(3)

संगामी है, यदि $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0.$

यह दो चरों की तीन रेखीय समीकरणों की संगतता के लिए अभीष्ठ प्रतिबन्ध है।

(iv) समीकरण $ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0$ सरल रेखा युग्म को प्रदर्षित करता है, यदि :

$$Abc+2fgh-af^2-bg^2-ch^2=0=\begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix}$$

अव्युत्क्रमणीय और व्युत्क्रमणीय (Singular & singular matrix):

किसी वर्ग मैट्रिक्स A को अव्युत्क्रमणीय या व्युत्क्रमणीय कहा जाता है, यदि |A| क्रमषः शून्य या अषून्य हैं।

सहखण्ड मैट्रिक्स एवं सहखण्डज मैट्रिक्स (Cofactor matrix & adjoint matrix):

माना $A=[a_{ij}]_n$ कोई वर्ग मैट्रिक्स है। तो A के प्रत्येक अवयव के स्थान पर उसके संगत सहखण्ड को प्रतिस्थापित करने से प्राप्त मैट्रिक्स को सहखण्ड मैट्रिक्स कहते है।

जबकि A की सहखण्ड मैट्रिक्स का परिवर्त A का सहखण्डज मैट्रिक्स कहलाता है तथा इसे adj A से प्रदर्षित करते है।

i.e. यदि $A=[a_{ij}]_n$

तो सहखण्ड $A=[c_{ij}]_n$ जबकि c_{ij}, i एवं j के सभी मानों के लिये a_{ij} का सहखण्ड है।

तथा Adj $A=[d_{ij}]_n$ यहाँ $d_{ij}=c_{ji}$ $\forall i$ & j.

सहखण्ड A और adj A के गुणधर्म (Properties of cofactor A and adj A):

(a) $A \,.\, agj\, A=|A|I_n=(adj\, A)\, A$ जहाँ $A=[a_{ij}]_n$.

(b) $|adj\, A|=|A|^{n-1}$, जहाँ n,A क्रम हैं।

उदाहरण किसी 3×3 मैट्रिक्स के लिये $|adj\, A|=|A|^2$

(c) यदि A सममित मैट्रिक्स है, तो adj A भी सममितत मैट्रिक्स हैं।

(d) यदि A अव्युत्क्रमणीय है, तो adj A भी अव्युत्क्रमणीय हैं।

मैट्रिक्स का प्रतिलोम (reciprocal matrix) (Inverse of a matrix) :

माना A व्युत्क्रमणीय मैट्रिक्स है। तो मैट्रिक्स $\frac{1}{|A|}$ adj A,A का गुणन प्रतिलोम है (इसे हम A का प्रमिलोम भी कहते हैं) और इसे A^{-1} से प्रदर्षित करते हैं। अतः $A(adj\, A) = |A|I_n = (adj\, A)A$

$\Rightarrow \quad A\left(\frac{1}{|A|}\text{adj}\,A\right) = I_n = \left(\frac{1}{|A|}\text{adj}\,A\right)A$, यदि A व्युत्क्रमणीय हैं।

$\Rightarrow \quad A^{-1} = \frac{1}{|A|}\text{adj}\,A.$

Remarks :

1. A के प्रतिलोम के विद्यमान होने के लिए आवष्यक एवं पर्याप्त शर्त यह है कि A व्युतुक्रमणीय होना चाहिए।

2. A^{-1} हमेषा व्युत्क्रमणीय होता है।

3. यदि $A = \text{dia}\,(a_{11}, a_{12}, \ldots\ldots. a_{nn})$ जहाँ $a_{ii} \neq 0 \forall i$, तो $A^{-1} = \text{diag}\,(a_{11}^{-1}, a_{22}^{-1}, \ldots\ldots a_{nn}^{-1})$.

4. किसी व्यतुकमणीय मैट्रिक्स A के लिए $(A^{-1})' = (A')^{-1}$ एवं $\text{adj}(A') = (\text{adj}\,A)'$.

5. $(A^{-1})^{-1} = A$ यदि A व्युत्क्रमणीय हैं।

6. माना k एक अषून्य अदिष है और A व्युत्क्रमणीय मैट्रिक्स है, तो $(KA)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1}$

7. $|A| \neq 0$ के लिये $\left|A^{-1}\right| = \frac{1}{|A|}$

8. माना A एक व्युत्क्रमणीय मैट्रिक्स है। तो $AB = AC \Rightarrow B = C$ एवं $BA = CA \Rightarrow B = C$

9. A व्युत्क्रमणीय और सममित हैं $\Rightarrow A^{-1}$ सममित हैं।

10. सामान्यतः $AB = 0$ का मतलब $A = 0$ या $B = 0$ नहीं है। लेकिन यदि A व्युत्क्रमणीय है और $AB = 0$, तो $B = 0$ इसी प्रकार B व्युत्क्रमणीय है और $AB = 0 \Rightarrow A = 0$ इसलिए $AB = 0 \Rightarrow$ यातो दोनों अव्युत्क्रमणीय हैं या उनमें से एक 0 हैं।

रैखिक समीकरणों का निकाय और मैट्रिक्स (System of linear equations & matrices) :

माना n समीकरणों वाला एक निकाय इस प्रकार है –

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots\ldots + a_{1n}x_n = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots\ldots. + a_{2n}x_n = b_2$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots\ldots. + a_{mn}x_n = b_n$$

माना $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots\ldots\ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots\ldots\ldots & a_{2n} \\ \ldots. & \ldots. & \ldots\ldots\ldots & \ldots. \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots\ldots\ldots & a_{mn} \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots. \\ x_n \end{bmatrix} \& B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots. \\ b_n \end{bmatrix}$

तब ऊपर दिया गया निकाय मैट्रिक्स रूप में $AX = B$ रूप में व्यकत किया जा सकता हैं।
निकाय को संगत कहा जाता है यदि इसका कम से कम एक हल विद्यमान है।

रैखिक समीकरणों का निकाय और मैट्रिक्स प्रतिलोम (System of linear equations and matrix inverse) :

यदि ऊपर दिये गये निकाय में n समीकरण और n अज्ञात हैं, तो $AX = B$ जहाँ A वर्ग मैट्रिक्स हैं।

परिणाम :

(1) यदि A अव्युत्क्रमणीय हैं तो $AX = B$ का हल $X = A^{-1}B$ होगा।

(2) यदि A अव्युत्क्रमणीय है और $(\text{adj}\,A)B = 0$ तथा मैट्रिक्स A के समस्त स्तम्भ समानुपातिक नहीं है तो निकाय के हलों की संख्या अनन्त होगी।

(3) यदि A अव्युत्क्रमणीय है और $(\text{adj}\,A)B \neq 0$, तो निकाय का कोई हल नहीं है।

(हम कह सकते हैं कि यह असंगत हैं।)

समघातीय निकाय एवं मैट्रिक्स प्रतिलोम (Homogeneous system and matrix inverse) :

यदि ऊपर दिया गया निकास समघात है, (n अज्ञात और n समीकरण वाला निकाय) तो मैट्रिक्स रूप में इसे AX=O लिखा जा सकता है। ($\because$ इस स्थिति में $b_1=b_2=........b_n=0$), जहाँ A एक वर्ग मैट्रिक्स हैं।

परिणाम :

(1) यदि A व्युतुत्क्रमणीय है, तो निकाय के केवल निरर्थक हल हैं (षून्य हल) X=0 ही होगें।

(2) यदि A अव्युत्क्रमणीय है, तो निकाय के अननत हल हैं। (निरर्थक हलों को लेकर) और अतः इसके सार्थक हल हैं।

मैट्रिक्स की कोटि (Rank of a matrix) :

माना $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ तो एक प्राकृत संख्या ρ को A की कोटि कहा जाता है यदि मैट्रिक्स A की ρ क्रम की कम से कम एक व्युतुत्क्रमणीय उपमैट्रिक्स विद्यमान हो और ρ क्रम से अधिक क्रम की कोई व्युत्क्रमणीय उपमैट्रिक्स विद्यमान नहीं हो। शून्य मैट्रिक्स की कोटि शून्य होती है।

eg. $A=\begin{bmatrix}3 & -1 & 2 & 5\\ 0 & 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 5 & 0\end{bmatrix}$

मैट्रिक्स $\begin{bmatrix}3 & 2\\ 0 & 2\end{bmatrix}$ मैट्रिक्स 'A' की एक व्युत्क्रमणीय उपमैट्रिक्स हैं।

मैट्रिक्स 'A' की 3 क्रम की उपमैट्रिक्स में सभी सम्भव वर्ग मैट्रिक्स है –

$$\begin{bmatrix}3 & -1 & 2\\ 0 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 5\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}3 & -1 & 5\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}3 & 2 & 5\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 5 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1 & 2 & 5\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 5 & 0\end{bmatrix}$$

और सभी अव्युत्क्रमणीय हैं। अतः A की कोटि 2 हैं।

मैट्रिक्स का प्रारम्भिक पंक्ति रूपान्तरण (Elementary row transformation of matrix):

निम्नलिखित प्रक्रिया को प्रारम्भिक पंक्ति रूपान्तरण कहा जाता है।

(a) दो पंक्तियों को परस्पर बदलना।

(b) किसी भी पंक्ति क समस्त अवयवों को एक अषून्य अदिष से गुणा करके लिखना।

(c) किसी भी पंक्ति को एक अचर राषि से गुणा कर अन्य पंक्ति में जोड़ा देना।

नोट : इसी प्रकार का प्रारम्भिक रूपान्तरण, स्तम्भ पर भी किया जा सकता है।

Remarks :

1. मैट्रिक्स पर किये गये प्रारम्भिक रूपान्तरणों से, उस मैट्रिक्स की कोटि अपरिवर्तित रहती है।
2. यदि कोई मैट्रिक्स A, किसी अन्य मैट्रिक्स B पर विभिन्न प्रारम्भिक रूपान्तरणों से प्राप्त हो तो मैट्रिक्स A एवं B परस्पर समान मैट्रिक्स कहालाती हैं तथा इसे $A\approx B$ से लिखते है।

मैट्रिक्स का सोपानक रूप (Echelon form of a matrix):

एक मैट्रिक्स सोपानक रूप में कही जाती है यदि :

(a) इसकी प्रत्येक पंक्ति का प्रथम अषून्य अवयव 1 हो तथा संगत स्तम्भों के (अर्थात् वो स्तम्भ जिनमें 1 आता है।) शेष समस्त अवयव शून्य हो।

(b) किसी भी अषून्य पंक्ति में प्रथम अषून्य अवयव से पहले शून्यों की संख्या, अगली अषून्य पंक्तियों में शून्यों की संख्या से कम हो।

परिणाम : सोपानक रूप में लिखी गई मैट्रिक्स की कोटि, उसमें अशून्य पंक्तियों की संख्या के बराबर होती है। (अर्थात् ऐसी पंक्तियों की संख्या के बराबर जिनमें कम से कम एक अवयव अशून्य हो।)

Remarks : किसी दी हुई मैट्रिक्स पर प्रारम्भिक पंक्ति रूपान्तरण का उपयोग करके इसे सोपानक रूप में बदल सकते हैं और अशून्य पंक्तियों की संख्या ज्ञात कर इसकी कोटि निर्धारित कर सकते हैं।

रेखिक समीकरणों का निकाय एवं मैट्रिक्स की कोटि : (System of linear equations & rank of matrix):

माना निकाय AX=B जहॉं A एक $m \times n$ मैट्रिक्स है। X एक n-स्तम्भ सदिष और B एक m-स्तम्भ सदिष है। माना [AB] सवंध्रित मैट्रिक्स (अर्थात् ऐसा मैट्रिक्स जो B के अवयवों को $(n+1)^{th}$ स्तम्भ के रूप में लेकर प्रथम n स्तम्भों को A मैट्रिक्स से लेकर बनाया गया हैं) को प्रदर्षित करता है। $\rho(A)$, की कोटि को प्रदर्षित करता $\rho([AB])$, सवंर्धित मैट्रिक्स की कोटि प्रदर्षित करता हैं। अतः $\rho(A) \le \rho([AB])$.

परिणाम :

(1) यदि $\rho(A) < \rho([AB])$ तो निकाय का कोई हल नहीं होगा (अर्थात् निकाय असंगत हैं।)

(2) यदि $\rho(A) = \rho([AB])$. अज्ञात राषियों की संख्या तो निकाय के अद्वितिय हल विद्यमान होगें।

.........(3) यदि $\rho(A) = \rho([AB]) <$ अज्ञात राषियों की संख्या, तब निकाय के अनन्त हल विद्यमान होंगें। (अतः यह संगत हैं।)

समघात निकाय और मैट्रिक्स की कोटि (Homogeneous system & rank of matrix):

माना 'n' अज्ञातों एवं m समीकरण वाला कोई समघात निकाय AX=0 है। इस स्थिति में B=0 और इसलिए $\rho(A) = \rho([AB])$. अतः यदि $\rho(A) = n$, तो निकाय के केवल शून्य हल विद्यमान होगें यदि $\rho(A) < n$ तो निकाय के अनन्त हल हैं।

अभिलाक्षणिक बहुपद एवं अभिलाक्षणिक समीकरण (Characteristic polynomial & Characteristic equation):

यदि 'A' कोई वर्ग मैट्रिक्स हो तो बहुपद |A-xI| को मैट्रिक्स A का अभिलाक्षणिक बहुपद कहा जाता है। तथा समीकरण |A-xI|=0 को मैट्रिक्स A का अभिलाक्षणिक समीकरण कहा जाता है।

कैले–हेम्लिटन प्रमेय (Cayley-Hamiton theorem):

प्रत्येक वर्ग मैट्रिक्स, स्वंय की अभिलाक्षणिक समीकरण को संतुष्ट करता है। अर्थात् यदि मैट्रिक्स A की अभिलाक्षणिक

समीकरण $a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n = 0$ हो, तो

$a_0A^n + a_1A^{n-1} + ... + a_{n-1}A + a_nI = 0$ होगा।

शून्यभावी मैट्रिक्स (Nilpotent matrix):

यदि कोई वर्ग मैट्रिक्स 'A' इस प्रकार हो कि $A^2=O$ तो मैट्रिक्स A को शून्यभावी मैट्रिक्स कहते हैं एक वर्ग मैट्रिक्स p क्रम की शून्यंभावी मैट्रिक्स कही जाती है, यदि p सबसे कम धनात्मक पूर्णाक संख्या इस प्रकार है कि $A^p=O$.

वर्गसम मैट्रिक्स (Idempotent matrix):

एक वर्ग मैट्रिक्स को वर्गसम कहा जाता है यदि $A^2=A$.

e.g. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ एक वर्गसम मैट्रिक्स हैं।

अन्तर्वलीन मैट्रिक्स (Involutory matrix) :

एक वर्ग मैट्रिक्स को अन्तर्वलनीय कहा जाता है यदि $A^2=I$, I इकाई मैट्रिक्स है।

e.g. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ एक अन्तर्वलनीय मैट्रिक्स हैं।

लाम्बिक मैट्रिक्स (Orthogonal matrix) :

एक वर्ग मैट्रिक्स को लाम्बिक मैट्रिक्स कहा जाता हैं यदि
A'A=I=A'A.

Exercise – 1

1-A(बहुविकल्पीय प्रश्न)

केवल एक विकल्प सही

1. विभिन्न संभव क्रमों की मैट्रिक्सों की संख्या जिनमें 12 अवयव हैं –
(A) 3 (B) 1 (C) 6 (D) इनमें से कोई नहीं

2. $\begin{bmatrix} x^2+x & x \\ 3 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -x+1 & x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$ तो x का मान है –
(A) -1 (B) 2 (C) 1 (D) x का कोई मान नहीं

3. यदि $A = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ और $B = \begin{bmatrix} -5 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & -3 & 2 \end{bmatrix}$ हो, तो –
(A) $AB = \begin{bmatrix} -5 & 8 & 0 \\ 0 & 4 & -2 \\ 3 & -9 & 6 \end{bmatrix}$ (B) AB=[-2 -1 4]
(C) $AB = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ (D) AB विद्यमान नहीं है।

4. यदि $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, J = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ और $B = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ हो, तो B=
(A) $I\cos\theta + J\sin\theta$ (B) $I\cos\theta - J\sin\theta$ (C) $I\sin\theta + J\cos\theta$ (D) $-I\cos\theta + J\sin\theta$

5. यदि A और B, 2 क्रम की वर्ग मैट्रिक्स हैं, तो $(A+B)^2$=
(A) $A^2+2AB+B^2$ (B) $A^2+AB+BA+B^2$ (C) $A^2+2BA+B^2$ (D) इनमें से कोई नहीं

6. यदि A एक विषम सममित मैट्रिक्स है, तो A का अनुरेख (trace) हैं –
(A) 1 (B) -1 (C) 0 (D) इनमें से कोई नहीं

7. सारणिक $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3+2\sqrt{2} & 2+2\sqrt{2} & 1 \\ -2\sqrt{2} & 2-2\sqrt{2} & 1 \end{vmatrix}$ का निरपेक्ष मान है –

(A) $16\sqrt{2}$ (B) $8\sqrt{2}$ (C) 8 (D) इनमें से कोई नहीं

8. यदि α, β और γ समीमकरण $x^3px+q=0$ के मूल हो, तो सारणिक $\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \beta & \gamma & \alpha \\ \gamma & \alpha & \beta \end{vmatrix}$ का मान है –

(A) p (B) q (C) p^2-2q (D) इनमें से कोई नहीं

9. यदि a, b, c >0 और $x, y, z \in R$ हो, तो सारणिक $\begin{vmatrix} (a^x+a^{-x})^2 & (a^x-a^{-x})^2 & 1 \\ (b^y+b^{-y})^2 & (b^y-b^{-y})^2 & 1 \\ (c^z+c^{-z})^2 & (c^z-c^{-z})^2 & 1 \end{vmatrix} =$

(A) $a^xb^yc^z$ (B) $a^{-x}b^{-y}c^{-z}$ (C) $a^{2x}b^{2y}c^{2z}$ (D) शून्य

10. सारणिक $\begin{vmatrix} a^2+1 & ab & ac \\ ba & b^2+1 & bc \\ ca & cb & c^2+1 \end{vmatrix} =$

(A) $1+a^2+b^2+c^2$. (B) $a^2+b^2+c^2$ (C) $(a+b+c)^2$ (D) इनमें से कोई नहीं

11. यदि a, b और c अशून्य वास्तविक संख्याएँ हो, तो $\begin{vmatrix} b^2c^2 & bc & a+b \\ c^2a^2 & ca & c+a \\ a^2b^2 & ab & a+b \end{vmatrix} =$

(A) abc (B) $a^2b^2c^2$ (C) ab+ca+ab (D) शून्य

12. सारणिक $\begin{vmatrix} b_1+c_1 & c_1+a_1 & a_1+b_1 \\ b_2+c_2 & c_2+a_2 & a_2+b_2 \\ b_3+c_3 & c_3+a_3 & a_3+b_3 \end{vmatrix} =$

(A) $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ (B) $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ (C) $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ (D) इनमें से कोई नहीं

13. यदि $x, y, z \in R$ तथा $\Delta = \begin{vmatrix} x & x+y & x+y+z \\ 2x & 5x+2y & 7x+5y+2z \\ 3x & 7x+3y & 9x+7y+3z \end{vmatrix} = -16$ हो, तो x का मान है –

(A) -2 (B) -3 (C) 2 (D) 3

14. सारणिक $\begin{vmatrix} \cos(\theta+\phi) & -\sin(\theta+\phi) & \cos 2\phi \\ \sin\theta & \cos\theta & \sin\phi \\ -\cos\theta & \sin\theta & \cos\phi \end{vmatrix}$ का मान है –

(A) 0 (B) θ से स्वतन्त्र (C) ϕ से स्वतन्त्र (D) θ और ϕ दोनों से स्वतन्त्र

15. यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ हो, तो adj A=

(A) $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ (B) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ (C) $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$ (D) $\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$

16. यदि $A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ हो, तो adj A=

(A) A' (B) I (C) O (D) A^2

17. यदि एक वर्ग मैट्रिक्स 'A' इस प्रकार है कि $A^2=I$ हो, तो $A^{-1}=$
(A) 2A (B) A (C) O (D) A+I

18. यदि A और B,3 क्रम की वर्ग मैट्रिक्स इस प्रकार है कि |A|=-1, |B|=3, तो |3AB| का मान है –
(A) -9 (B) -81 (C) -27 (D) 81

19. यदि $A = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 4 \\ 2 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ हो, तो A^{-1}का मान है –

(A) A (B) A^2 (C) A^3 (D) A^4

20. माना $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}$ एवं $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ एवं मैट्रिक्स X इस प्रकार है कि A=BX, तो X=

(A) $\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}$ (B) $\frac{1}{2}\begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$ (C) $\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}$ (D) इनमें से कोई नहीं

21. मैट्रिक्स $\begin{bmatrix} a & b & (a\alpha-b) \\ b & c & (b\alpha-c) \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ अव्युत्क्रमणीय (non-invertible) हैं, यदि

(A) $\alpha=1/2$ (B) a,b,c समान्तर श्रेढ़ी में है

(C) a,b,c गुणोत्तर श्रेढ़ी में है (D) a,b,c हरात्मक श्रेढ़ी में है

22. यदि B एक व्युत्क्रमणीय मैट्रिक्स और A एक वर्ग मैट्रिक्स है, तो $(B^{-1}AB)$ बराबर है –
(A) $\det(A^{-1})$ (B) $\det(B^{-1})$ (C) det(A) (D) det(B)

23. यदि मैट्रिक्स $A = \begin{bmatrix} y+a & b & c \\ a & y+b & c \\ a & b & y+c \end{bmatrix}$ की कोटि 3 है, तो –
(A) y≠(a+b+c) (B) y≠1 (C) y=0 (D) y≠ - (a+b+c) and y≠0

24. यदि A,m×1 क्रम की अशून्य स्तम्भ मैट्रिक्स और B,1×n क्रम की अशून्य पंक्ति मैट्रिक्स हैं, तो AB की कोटि है –
(A) n (B) m (C) 1 (D) इनमें से कोई नहीं

25. समीकरण निकाय -2x+y+z=1,x -2y+z= -2, x+y+λz=4 का कोई हल नहीं है, यदि
(A) λ= -2 (B) λ= -1 (C) λ=3 (D) इनमें से कोई नहीं

26. रेखिक समीकरण निकाय x+y-z=6, x+2y-3z=14 और 2x+5y-λz=9(λ∈R) का अद्वितीय हल है, यदि
(A) λ=8 (B) λ≠8 (C) λ=7 (D) λ≠7

27. यदि समीकरण निकाय x+2y+3z=4, x+py+2z=3, x+4y+μz=3 के अनन्त हल हो, तो –
(A) p=2, μ=3 (B) p=2, μ=4 (C) 3p=2μ (D) p=4,μ=2

28. यदि a≠b हो, तो समीकरण निकाय ax+by+bz=0, bx+ay+bz=0, bx+by+az=0 के अशून्य हल (Nontrivial solutions) होगें, यदि
(A) a+b=0 (B) a+2b=0 (C) 2a+b=0 (D) a+4b=0

29. यदि A और B दो n×n क्रम की दो व्युत्क्रमणीय मैट्रिक्स है, तो –
(A) AB व्युत्क्रमणीय हैं (B) AB अव्युत्क्रमणीय हैं (C) $(AB)^{-1}=A^{-1}B^{-1}$ (D) $(AB)^{-1}$ विद्यमान नहीं हैं

30. यदि मैट्रिक्स $\begin{bmatrix} 0 & 2\beta & \gamma \\ \alpha & \beta & -\gamma \\ \alpha & -\beta & \gamma \end{bmatrix}$ लाम्बिक मैट्रिक्स है, तो
(A) $\alpha = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ (B) $\beta = \pm\frac{1}{\sqrt{6}}$ (C) $\gamma = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ (D) उपरोक्त सभी

31. मैट्रिक्स $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{bmatrix}$ है –
(A) वर्गसम मैट्रिक्स (B) अनैच्छिक मैट्रिक्स (C) शून्यंभावी मैट्रिक्स (D) इनमें से कोई नहीं

एक से अधिक विकल्प सही

32. यदि A एक वर्ग मैट्रिक्स है, तो –
(A) AA' सममित हैं (B) AA' विषम सममित हैं (C) A'A सममित हैं (D) A'A विषम सममित हैं

33. निम्न में से कौनसा कथन गलत है –

(A) एक सममित मैट्रिक्स के मुख्य विकर्ण के सभी अवयव शून्य होते हैं

(B) एक विषम सममित मैट्रिक्स के मुख्य विकर्ण के सभी अवयव शून्य होते हैं

(C) किसी वर्ग मैट्रिक्स A के लिए $\frac{1}{2}(A + A')$ सममित हैं।

(D) किसी वर्ग मैट्रिक्स A के लिए $\frac{1}{2}(A - A')$ विषम सममित हैं।

34. यदि D एक तीन क्रम का सारणिक है तथा Δ, D के सहखण्डों से बना सारणिक हो, तो
(A) $\Delta = D^2$
(B) $D=0,\ \Delta=0$
(C) यदि D=27 हो, तो Δ पूर्ण घन होगा।
(D) इनमें से कोई नहीं

35. माना a_1, a_2, a_3 समान्तर श्रेढ़ी में है और b_1, b_2, b_3 हरात्मक श्रेढ़ी में हैं। यदि $\Delta = \begin{vmatrix} a_1-b_1 & a_1-b_2 & a_1-b_3 \\ a_2-b_1 & a_2-b_2 & a_2-b_3 \\ a_3-b_1 & a_3-b_2 & a_3-b_3 \end{vmatrix}$ हो, तो

(A) Δ, a_1, a_2, a_3 से स्वतन्त्र है।
(B) $a_1-\Delta,\ a_2-2\Delta,\ a_3-3\Delta$, समान्तर श्रेढ़ी में है।
(C) $b_1+\Delta,\ b_2+\Delta,\ b_3+\Delta$, हरात्मक श्रेढ़ी में है।
(D) Δ, b_1, b_2, b_3 से स्वतन्त्र है।

36. यदि $\Delta = \begin{vmatrix} x & 2y-z & -z \\ y & 2x-z & -z \\ y & 2y-z & 2x-2y-z \end{vmatrix}$ हो, तो
(A) x-y, Δ का एक गुणनखण्ड है।
(B) $(x-y)^2$, Δ का एक गुणनखण्ड हैं।
(C) $(x-y)^3$, Δ का एक गुणनखण्ड है।
(D) Δ, z से स्वतन्त्र है।

37. मैट्रिक्स $\begin{bmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 2 & -4 & a-4 \\ 1 & -2 & a+1 \end{bmatrix}$ की कोटि है –
(A) 2 if a=6
(B) 2 if a=1
(C) 1 if a=2
(D) 1 if a= -6

38. यदि B एक वर्गसम मैट्रिक्स है और A=I-B हो, तो –
(A) $A^2=A$
(B) $A^2=I$
(C) AB=0
(D) BA=0

39. किसी वर्ग मैट्रिक्स A के लिए निम्न में से कौनसा कथन गलत हैं ($|A|\neq 0$)-

(A) यदि A विकर्ण मैट्रिक्स है, तो A^{-1} भी एक विकर्ण मैट्रिक्स होगा।
(B) यदि A एक सममित मैट्रिक्स है, तो A^{-1} भी एक सममित मैट्रिक्स होगा।
(C) यदि $A^{-1}=A \Rightarrow A$ एक वर्गसम मैट्रिक्स हैं।
(D) यदि $A^{-1}=A \Rightarrow A$ एक अर्न्तवलनीय मैट्रिक्स हैं।

1-B (विषयात्मक प्रश्न)

1. एक 3×2 मैट्रिक्स बनाइए जिसके अवयव $a_{ij}=2i-j$ से दिये जाते है।

2. यदि $\begin{bmatrix} x-y & 1 & z \\ 2x-y & 0 & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ हो, तो x,y,z,w ज्ञात कीजिए।

3. यदि $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & -4\\ 5 & 6\end{bmatrix}$ और $B=\begin{bmatrix}4 & 5 & 6\\ 7 & -8 & 2\end{bmatrix}$ हो, तो क्या BA और AB बरबर होगे ? इनमें मान भी ज्ञात कीजिए।

4. यदि $A=\begin{bmatrix}3 & -4\\ 1 & -1\end{bmatrix}$ हो, तो प्रदर्षित कीजिए कि $A^3=\begin{bmatrix}7 & -12\\ 3 & -5\end{bmatrix}$

5. यदि $A=\begin{bmatrix}0 & -\tan\frac{\alpha}{2}\\ \tan\frac{\alpha}{2} & 0\end{bmatrix}$ हो, तो प्रदर्षित कीजिए कि $(I+A)=(I-A)\begin{bmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{bmatrix}$

6. यदि $A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 2\\ 0 & 2 & 1\\ 1 & 0 & 2\end{bmatrix}$ हो, तो प्रदर्षित कीजिए कि $A^3=(5A-I)(A-I)$

7. मना $A=[a_{ij}]_{n\times n}$ जहॉ $a_{ij}=i^2-j^2$, प्रदर्षित कीजिए A विषम सममित है।

8. निम्नलिखित सारणिकों में प्रत्येक अवयव मे उपसारणिकों के मान ज्ञात कीजिये।

(i) $\begin{vmatrix}1 & 2\\ -3 & 4\end{vmatrix}$ (ii) $\begin{vmatrix}1 & -3 & 2\\ 4 & -1 & 2\\ 3 & 5 & 2\end{vmatrix}$

9. दी गई सारणिक $\begin{vmatrix}0 & 1 & \sec\alpha\\ \tan\alpha & -\sec\alpha & \tan\alpha\\ 1 & 0 & 1\end{vmatrix}$ में अवयव 3– 1 के उपसारणिक (अर्थात् M_{31}) का मान 1 है, तो α का मान ज्ञात कीजिये जहॉ $(0\le\alpha\le\pi)$.

10. निम्नलिखित सारणिकों में प्रत्येक अवयव के सहखण्डों के मान ज्ञात कीजिये।

(i) $\begin{vmatrix}1 & -3\\ 2 & 4\end{vmatrix}$ (ii) $\begin{vmatrix}-1 & 2 & 0\\ 1 & -2 & -1\\ 2 & 1 & -3\end{vmatrix}$

11. सारिणक के गुणधर्मो के उपयोग से निम्न के मान ज्ञात कीजिये।

(i) $\begin{vmatrix}23 & 6 & 11\\ 36 & 5 & 26\\ 63 & 13 & 37\end{vmatrix}$ (ii) $\begin{vmatrix}0 & c & b\\ -c & 0 & a\\ -b & -a & 0\end{vmatrix}$

(iii) $\begin{vmatrix}103 & 115 & 114\\ 111 & 108 & 106\\ 104 & 113 & 116\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}113 & 116 & 104\\ 108 & 106 & 111\\ 115 & 114 & 103\end{vmatrix}$ (iv) $\begin{vmatrix}\sqrt{13}+\sqrt{3} & 2\sqrt{5} & \sqrt{5}\\ \sqrt{15}+\sqrt{26} & 5 & \sqrt{10}\\ 3+\sqrt{65} & \sqrt{15} & 5\end{vmatrix}$

12. सिद्ध कीजिए –

(i) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (a-b)(b-c)(c-a) = \begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ca \\ 1 & c & ab \end{vmatrix}$

(ii) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = (a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)$

(iii) $\begin{vmatrix} a & b+c & a^2 \\ b & c+a & b^2 \\ c & a+b & c^2 \end{vmatrix} = -(a+b+c)(a-b)(b-c)(c-a)$

13. यदि a,b,c धनात्मक है तथा गुणोत्तर श्रेणी के कमषः p वें q वें, तथा r वें पद हैं, तो बिना विस्तार के प्रदर्षित कीजिए
$\begin{vmatrix} \log a & p & 1 \\ \log b & q & 1 \\ \log c & r & 1 \end{vmatrix} = 0$

14. निम्नलिखित समीकरणों के अषून्य हल ज्ञात कीजिये।

(i) $\Delta = \begin{vmatrix} a & b & ax+b \\ b & c & bx+c \\ ax+b & bx+c & c \end{vmatrix} = 0.$ (ii) $\begin{vmatrix} 15-2x & 11 & 10 \\ 11-3x & 17 & 16 \\ 7-x & 14 & 13 \end{vmatrix} = 0$

15. यदि $S_r=\alpha r+\beta^r+\gamma^r$. तब दर्षाइये कि $\begin{vmatrix} s_0 & s_1 & s_2 \\ s_1 & s_2 & s_3 \\ s_2 & s_3 & s_4 \end{vmatrix} = (\alpha-\beta)^2(\beta-\gamma)^2(\gamma-\alpha)^2.$

16. दर्षाइये कि $\begin{vmatrix} a_1l_1+b_1m_1 & a_1l_2+b_1m_2 & a_1l_3+b_1m_3 \\ a_2l_1+b_2m_1 & a_2l_2+b_2m_2 & a_2l_3+b_2m_3 \\ a_3l_1+b_3m_1 & a_3l_2+b_3m_2 & a_3l_3+b_3m_3 \end{vmatrix} = 0.$

17. यदि $\begin{vmatrix} e^x & \sin x \\ \cos x & \ell n(1+x) \end{vmatrix} = A+Bx+Cx^2+.....,$ तब A तथा B का मान ज्ञात कीजिए।

18. दर्षाये कि $\Delta = \begin{vmatrix} b^2+c^2 & ab & ac \\ ab & c^2+a^2 & bc \\ ca & cb & a^2+b^2 \end{vmatrix} = 4a^2b^2c^2$

19. सिद्ध करो कि det $(A^{-1})=\dfrac{1}{\det(A)}$ जहॉ A कम n की एक प्रतिलोम आव्यूह है।

20. (i) सिद्ध करो कि (adj adj A)=$|A|^{n-2}A$

(ii) |adj adj adj A| का |A| के पदों में मान ज्ञात करो।

21. मैट्रिक्स $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ के लिए a और b के मान ज्ञात कीजिए, यदि $A^2+aA+bI=0$ हो। तथा A^{-1} भी ज्ञात कीजिए।

22. यदि $A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -15 & 6 & -5 \\ 5 & -2 & 2 \end{bmatrix}$ और $B = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix}$ हो, तो $(AB)^{-1}$ ज्ञात कीजिए।

23. यदि $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 4 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}$ और AB-CD=0 हो, तो D ज्ञात कीजिए।

24. यदि $A=[a_{ij}]_{m\times n}$,r कोटि का एक आव्यूह है तथा B, 'r+1' क्रम का एक वर्ग उपआव्यूह है, तब B प्रतिलोमीय है या नहीं।

25. क्रेमर नियम के प्रयोग से निम्नलिखित समीकरण निकाय का हल ज्ञात कीजिए।
(i) 2x+y+6z=46
5x-6y+4z=15
7x+4y-3z=19
(ii) x-3y+z=2
3x+y+z=6
5x+y+3z=3

26. λ तथा μ के वह मान ज्ञात कीजिए जिनके लिए दिये गये समीकरण निकाय
X+y+z=6; x+2y+3z=10 एवं $x+2y+\lambda z=\mu$
(a) अद्वितीय हल होंगे। (b) अनन्त हल हैं। (c) कोई हल नहीं है।

27. क्रेमर नियम के प्रयोग से हल कीजिए : $\frac{4}{x+5}+\frac{3}{y+7}=-1$ & $\frac{6}{x+5}-\frac{6}{y+7}=-5$

28. c के वह मान ज्ञात कीजिए जिसके लिए समीकरण निकाय
2x+3y=3
(c+2)x+(c+4)y=c+6
$(c+2)^2x+(c+4)^2y=(c+6)^2$ संगत है।
तथा c के इन मानों के लिए ऊपर दी गई समीकरणों को हल कीजिए।

29. यदि A और B दो वर्ग मैट्रिक्स इस प्रकार है कि AB=A एवं BA=B तो सिद्ध कीजिए कि A और B वर्गसम मैट्रिक्स हैं।

Exercise – 2

2-A (बहुविकल्पीय प्रश्न)

केवल एक विकल्प सही

1. यदि A=diag(2,-1,3), B=diag(-1,3,2) हो, तो A^2B=
(A) diag(5,4,11) (B) diag(-4,3,18) C) diag(3,1,8) (D) B

2. $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -7 & 4 \end{bmatrix}$ एवं $B = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 7 & 2 \end{bmatrix}$ हो, तो B^TA^T हैं –
(A) एक शून्य मैट्रिक्स (B) एक इकाई मैट्रिक्स
(C) एक अदिष, लेकिन इकाई मैट्रिक्स नहीं (D) इस प्रकार कि $T_r(B^TA^T)=4$

3. $A=\begin{bmatrix}2 & -1\\ -1 & 2\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}1 & 4\\ -1 & 1\end{bmatrix}$ के लिए कौनसा सम्बन्ध सही हैं–

(A) $(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$
(B) $(A-B)^2=A^2-2AB+B^2$
(C) $AB=BA$
(D) इनमें से कोई नहीं

4. यदि $A=\begin{bmatrix}\cos^2\theta & \cos\theta\sin\theta\\ \cos\theta\sin\theta & \sin^2\theta\end{bmatrix}$ और $B=\begin{bmatrix}\cos^2\phi & \cos\phi\sin\phi\\ \cos\phi\sin\phi & \sin^2\phi\end{bmatrix}$ के लिए AB=0, हो तो $\theta-\phi$ हैं –

(A) $\frac{\pi}{2}$ का विषम गुणज
(B) π का विषम गुणज
(C) $\frac{\pi}{2}$ का सम गुणज
(D) 0

5. यदि $X=\begin{bmatrix}3 & -4\\ 1 & -1\end{bmatrix}$ हो, तो X^n का मान है–

(A) $\begin{bmatrix}3n & -4n\\ n & -n\end{bmatrix}$
(B) $\begin{bmatrix}2+n & 5-n\\ n & -n\end{bmatrix}$
(C) $\begin{bmatrix}3^n & (-4)^n\\ 1^n & (-1)^n\end{bmatrix}$
(D) इनमें से कोई नहीं

6. यदि A और B सममित मैट्रिक्स हैं, तो ABA है –
(A) सममित मैट्रिक्स
(B) विषम सममित मैट्रिक्स
(C) विकर्ण मैट्रिक्स
(D) अदिष मैट्रिक्स

7. यदि A एक विषम सममित मैट्रिक्स है और n एक धनात्मक सम पूर्णाक है, तो A^n है –
(A) एक सममित मैट्रिक्स
(B) एक विषम सममित मैट्रिक्स
(C) एक विकर्ण मैट्रिक्स
(D) इनमें से कोई नहीं

8. यदि A एक व्युत्क्रमणीय मैट्रिक्स A^T, A के परिवर्त को प्रदर्षित करता हैं, तो –
(A) $|A|\neq|A^T|$
(B) $|A.A^T|\neq|A|^2$
(C) $|A^T.A|\neq|A^T|^2$
(D) $|A|+|A^T|\neq 0$

9. निम्न में से कौनसा गलत है –
(A) $A^2-B^2=(A+B)(A-B)$
(B) $(A^T)^T=A$
(C) $(AB)^n=A^nB^n$, जहाँ A,B क्रमविनिमेय
(D) $(A-I)(I+A)=0 \Leftrightarrow A^2=I$

10. यदि A,3 क्रम का वर्ग मैट्रिक्स है, तो निम्न में से कौनसा कथन सही हैं (जहाँ I इकाई मैट्रिक्स हैं) –
(A) det(-A)= -detA
(B) detA=0
(C) det(A+I)=1+detA
(D) det 2A=2 detA

11. सारणिक $\Delta=\begin{bmatrix}a^2(1+x) & ab & ac\\ ab & b^2(1+x) & bc\\ ac & bc & c^2(1+x)\end{bmatrix}$ का एक गुणनखण्ड है –
(A) 1+x
(B) $(1+x)^2$
(C) x^2
(D) x^2+1

12. यदि A,B,C त्रिभुज ABC के कोण हो, तो सारणिक $\begin{vmatrix} \sin\frac{A}{2} & \sin\frac{B}{2} & \text{Sin}\frac{C}{2} \\ \sin(A+B+C) & \sin\frac{B}{2} & \cos\frac{A}{2} \\ \cos\frac{(A+B+C)}{2} & \tan(A+B+C) & \sin\frac{C}{2} \end{vmatrix}$ का अधिकतम मान है –

(A) $\frac{3\sqrt{3}}{8}$ (B) $\frac{1}{8}$ (C) $2\sqrt{2}$ (D) 2

13. $\Delta = \begin{vmatrix} 1+a^2+a^4 & 1+ab+a^2b^2 & 1+ac+a^2c^2 \\ 1+ab+a^2b^2 & 1+b^2+b^4 & 1+bc+b^2c^2 \\ 1+ac+a^2c^2 & 1+bc+b^2c^2 & 1+c^2+c^4 \end{vmatrix}$ का मान है –

(A) $(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2$ (B) 2(a-b)(b-c)(c-a)
(C) 4(a-b)(b-c)(c-a) (D) $(a+b+c)^3$

14. $\Delta = \begin{vmatrix} a^3-x & a^4-x & a^5-x \\ a^5-x & a^6-x & a^7-x \\ a^7-x & a^8-x & a^9-x \end{vmatrix}$ का मान है –

(A) 0 (B) $(a^3-1)(a^6-1)(a^9-1)$
(C) $(a^3+1)(a^6+1)(a^9+1)$ (D) $a^{15}-1$

15. यदि $f(x) = \begin{vmatrix} a^{-x} & e^{x\ell na} & x^2 \\ a^{-3x} & e^{3x\ell na} & x^4 \\ a^{-5x} & e^{5x\ell na} & 1 \end{vmatrix}$ हो, तो

(A) f(x)-f(-x)=0 (B) f(x).f(-x)=0

(C) f(x)+f(-x)=0 (D) f(x)=f(-x)=0

16. यदि $f(x) = \begin{vmatrix} 1+\sin^2 x & \cos^2 x & 4\sin 2x \\ \sin^2 x & 1+\cos^2 x & 4\sin 2x \\ \sin^2 x & \cos^2 x & 1+4\sin 2x \end{vmatrix}$ हो, तो f(x) का अधिकतम मान है –

(A) 4 (B) 6 (C) 8 (D) 12

17. यदि $\Delta_1 = \begin{bmatrix} 2a & b & e \\ 2d & e & f \\ 4x & 2y & 2z \end{bmatrix}, \Delta_2 = \begin{bmatrix} f & 2d & e \\ 2z & 4x & 2y \\ e & 2a & b \end{bmatrix}$ हो, तो $\Delta_1 - \Delta_2$ का मान है –

(A) $x+\frac{y}{2}+z$ (B) 2 (C) 0 (D) 3

18. यदि a,b,c अशून्य हैं, तो समीकरण निकाय
$(\alpha+a)x+\alpha y+\alpha z=0$

$\alpha x+(\alpha+b)y+\alpha z=0$
$\alpha x+\alpha y+(\alpha+c)z=0$
के अशून्य हल होगें यदि
(A) $\alpha^{-1}= -(a^{-1}+b^{-1}+c^{-1})$ (B) $\alpha^{-1}=a+b+c$
(C) $\alpha+a+b+c=1$ (D) इनमें से कोई नहीं

19. यदि $U_n = \begin{vmatrix} n & 1 & 5 \\ n^2 & 2N+1 & 2N+1 \\ n^3 & 3N^2 & 3N+1 \end{vmatrix}$ हो, तो $\sum_{n=1}^{N} U_n$ का मान है –

(A) $2\sum_{n=1}^{N} n$ (B) $2\sum_{n=1}^{N} n^2$ (C) $\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N} n^2$ (D) 0

20. यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$; $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ तथा $A-\lambda I$ एक अव्युत्क्रमणीय मैट्रिक्स हैं, तो –

(A) $\lambda \in \phi$ (B) $\lambda^2-3\lambda-4=0$ (C) $\lambda^2+3\lambda+4=0$ (D) $\lambda^2-3\lambda-6=0$

21. मैट्रिक्स समीकरण AB=AC से यह निष्कर्ष निकलता है कि B=C जबकि :
(A) A अव्युत्क्रमणीय हो। (B) A व्युत्क्रमणीय हो। (C) A सममित हो। (D) A वर्ग मैट्रिक्स हो।

22. यदि A एक $n\times n$ क्रम की वर्ग मैट्रिक्स है और k कोई आदिष हैं, तो adj(kA) बराबर है –
(A) k adjA (B) k^nadjA (C) k^{n-1}adjA (D) k^{n+1}adjA

23. यदि $F(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ और $G(\beta) = \begin{bmatrix} \cos\beta & 0 & \sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\beta & 0 & \cos\beta \end{bmatrix}$ हो, तो $[F(\alpha)\, G(\beta)]^{-1}=$
(A) $F(\alpha)\ -G(\beta)$ (B) $-F(\alpha)\ -G(\beta)$ (C) $[F(\alpha)]^{-1}\ [G(\beta)]^{-1}$ (D) $[G(\beta)]^{-1}[F(\alpha)]^{-1}$

24. 'k' का वह मान जिसके लिये समीकरण निकाय $3x+ky-2z=0$, $x+ky+3z=0$, $2x+3y-4z=0$ का अशून्य हल (परिमेय संख्याओं के समुच्चय में से) विद्यमान है, होगा :
(A) 33/2 (B) 31/2 (C) 16 (D) 15

25. a का मान जिसके लिए समीकरण निकाय $a^3x+(a+1)^3y+(a+2)^3z=0$
$Ax+(a+1)y+(a+2)z=0$, $x+y+z=0$ का एक अशून्य हल हैं –
(A) -1 (B) 0 (C) 1 (D) इनमें से कोई नहीं

26. यदि $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ समीकरण $x^2-(a+d)x+k=0$ को संतुष्ट करता है, तो –
(A) k=bc (B) k=ad
(C) $k=a^2+b^2+c^2+d^2$ (D) k=ad-bc

27. निम्न में से कौनसी शून्यभावी मैट्रिक्स हैं –
(A) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (B) $\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ (C) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ (D) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

एक से अधिक विकल्प सही

28. माना a,b>0 और $\Delta = \begin{bmatrix} -x & a & b \\ b & -x & a \\ a & b & -x \end{bmatrix}$ हो, तो

(A) a+b-x, Δ का एक गुणनखण्ड है। (B) $x^2+(a+b)x+a^2+b^2-ab$, Δ का एक गुणनखण्ड है।

(C) यदि a=b हो, तो $\Delta=0$ के तीन वास्तविक मूल है, (D) इनमें से कोई नहीं

29. सारणिक $\begin{vmatrix} b & c & b\alpha+c \\ c & d & c\alpha+d \\ b\alpha+c & c\alpha+d & a\alpha^3-c\alpha \end{vmatrix}$ का मान शून्य होगा, यदि

(A) b,c,d से.श्रे. में हैं। (B) b,c,d गु.श्रे. में हैं।

(C) b,c,d ह.श्रे. में हैं। (D) α, $ax^3-bx^2-3cx-d=0$ का एक मूल हैं।

30. माना $\Delta = \begin{vmatrix} a & a^2 & 0 \\ 1 & 2a+b & (a+b)^2 \\ 0 & 1 & 2a+3b \end{vmatrix}$, तो

(A) a+b, Δ का एक गुणनखण्ड है। (B) a+2b, Δ का एक गुणनखण्ड है।

(C) 2a+3b, Δ का एक गुणनखण्ड है। (D) a^2, Δ का एक गुणनखण्ड है।

31. माना $\Delta = \begin{vmatrix} \sin\theta\cos\phi & \sin\theta\sin\phi & \cos\theta \\ \cos\theta\cos\phi & \cos\theta\sin\phi & -\sin\theta \\ -\sin\theta\sin\phi & \sin\theta\cos\phi & 0 \end{vmatrix}$, तो

(A) Δ, θ से स्वतन्त्र हैं। (B) Δ, ϕ से स्वतन्त्र है।
(C) Δ एक अचर है। (D) इनमें से कोई नहीं

32. एक वर्ग मैट्रिक्स A जिसके अवयव वास्तविक संख्याओं के समुच्चय में से लिए गए हैं, लाम्बिक मैट्रिक्स कहलाता है यदि $A'=A^{-1}$ हो। यदि A एक लाम्बिक मैट्रिक्स हैं, तो –
(A) A' लाम्बिक है। (B) A^{-1} लाम्बिक है। (C) adj A=A' (D) $|A^{-1}|=1$

33. यदि $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ हो, तो –

(A) |A|=2 (B) A व्युत्क्रमणीय हैं

(C) $\text{Adj.}A = \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & -1 & 1/2 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{bmatrix}$ (D) A विषम सममित मैट्रिक्स हैं

34. सही कथन ज्ञात कीजिए –

(A) यदि n रेखीय समीकरण वाले निकाय का हल अद्वितीय हो, तो गुणांक मैट्रिक्स अव्युत्क्रमणीय होता है।

(B) यदि n रेखीय समीकरण वाले निकाय का हल अद्वितीय हो, तो गुणांक मैट्रिक्स व्युत्क्रमणीय होता है।

(C) यदि A^{-1} विद्यमान हैं, तो $(adj\ A)^{-1}$ विद्यमान हो भी सकता हैं और नहीं भी

(D) $F(x) = \begin{bmatrix} \cos x & -\sin x & 0 \\ \sin x & \cos x & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, तो F(x) . F(y)=F(x-y)

35. $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ के लिए निम्न में से कौनसा कथन सही है –

(A) A+4I एक सममित मैट्रिक्स हैं।

(B) $A^2-4A+5I_2=0$

(C) A-B, α के किसी भी मान के लिए विकणर्स मैट्रिक्स है यदि $B = \begin{bmatrix} \alpha & -1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$

(D) A-4I एक विषम सममित मैट्रिक्स है।

36. निम्न में कौनसा कथन सही हैं –

(A) विषम कम की प्रत्येक विषम सममित मैट्रिक्स व्युत्क्रमणीय होती है।

(B) यदि किसी वर्ग मैट्रिक्स का सारणिक अशून्य है, तो यह व्युत्क्रमणीय हैं

(C) मैटिक्स की रैंक, मैट्रिक्स के कम के बराबर या ज्यादा होती है।

(D) एक अव्युत्क्रमणीय मैट्रिक्स का सहखण्डज हमेशा अव्युत्क्रमणीय होता है।

37. यदि $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ (जहाँ $bc\neq0$) समीकरण $x^2+k=0$ को संतुष्ट करता है, तो –

(A) a+d=0 (B) k= -|A| (C) k= |A| (D) इनमें से कोई नहीं

2-B (विषयात्मक प्रश्न)

1. दिया गया हैं कि $F(x) = \begin{bmatrix} \cos x & -\sin x & 0 \\ \sin x & \cos x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, यदि $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ हो, तो y के किस मान के लिए F(x+y)=F(x)F(y) है।

2. प्रदर्षित कीजिए कि $\begin{bmatrix} 1 & -\tan\theta/2 \\ \tan\theta/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \tan\theta/2 \\ -\tan\theta/2 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$

3. यदि $a^2+b^2+c^2=1$ हो, तो सिद्ध कीजिए कि सारणिक

$$\begin{vmatrix} a^2+(b^2+c^2)\cos\phi & ab(1-\cos\phi) & ac(1-\cos\phi) \\ ba(1-\cos\phi) & b^2+(c^2+a^2)\cos\phi & bc(1-\cos\phi) \\ ca(1-\cos\phi) & cb(1-\cos\phi) & c^2+(a^2+b^2)\cos\phi \end{vmatrix}$$ का मान a,b,c से स्वतन्त्र है।

4. ΔABC में यदि $\begin{vmatrix} \cot\frac{A}{2} & \cot\frac{B}{2} & \cot\frac{C}{2} \\ \tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2} & \tan\frac{C}{2}+\tan\frac{A}{2} & \tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2} \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$ हो, तो सिद्ध कीजिए कि ΔABC या तो समद्विबाहु या समबाहु त्रिभुज है।

5. सिद्ध कीजिए कि : $\begin{vmatrix} -bc & b^2+bc & c^2+bc \\ a^2+ac & -ac & c^2+ac \\ a^2+ab & b^2+ab & -ac \end{vmatrix} = (ab+bc+ca)^3$

6. यदि $\begin{vmatrix} \frac{1}{a+x} & \frac{1}{b+x} & \frac{1}{c+x} \\ \frac{1}{a+y} & \frac{1}{b+y} & \frac{1}{c+y} \\ \frac{1}{a+z} & \frac{1}{b+z} & \frac{1}{c+z} \end{vmatrix} = \frac{P}{Q}$ जहाँ Q हरों का गुणनफल है, तो सिद्ध कीजिए कि
$P=(a-b)(b-c)(c-a)(x-y)(y-z)(z-x)$

7. दर्शाइये कि , $\begin{vmatrix} bc-a^2 & ca-b^2 & ab-c^2 \\ ca-b^2 & ab-c^2 & bc-a^2 \\ ab-c^2 & bc-a^2 & ca-b^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a^2 & c^2 & 2ac-b^2 \\ 2ab-c^2 & b^2 & a^2 \\ b^2 & 2bc-a^2 & c^2 \end{vmatrix}$

8. यदि $a,b,c,x,y,z \in R$, तब सिद्ध कीजिए कि

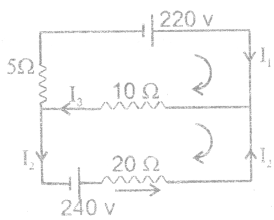
$$\begin{vmatrix} (a-x)^2 & (b-x)^2 & (c-x)^2 \\ (a-y)^2 & (b-y)^2 & (c-y)^2 \\ (a-z)^2 & (b-z)^2 & (c-z)^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (1+ax)^2 & (1+bx)^2 & (1+cx)^2 \\ (1+ay)^2 & (1+by)^2 & (1+cy)^2 \\ (1+az)^2 & (1+bz)^2 & (1+cz)^2 \end{vmatrix}$$

9. $A = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 4 \\ 5 & -4 & -3 \\ 7 & 2 & 9 \end{bmatrix}$ के लिए प्रारम्भिक रूपान्तरणों का उपयोग कर $\left\{\frac{1}{2}(A-A'+1)\right\}^{-1}$ का मान ज्ञात कीजिए।

10. यदि $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -\alpha \\ 5 & \alpha & 0 \\ 0 & \alpha & 3 \end{bmatrix}$ हो, तो α के किस मान के लिए A^{-1} विद्यमान है ? A^{-1} ज्ञात कीजिए और सिद्ध कीजिए कि $A^{-1}=A^2-6A+11I$ जब $\alpha=1$.

11. गौरव 3 पेन, 2 बेग और 1 पैंसिल बॉक्स खरीदता है और 41 रूपये चुकाता है। उसी दुकान से धीरज 2 पेन, 1 बैंग और 2 पैंसिल बॉक्स खरीदता है और 29 रूपये चुकाता है जबकि अंकुर 2 पेन, 2 और 2 पैंसिल बॉक्स खरीदता है और 44 रूपये चुकता है। इस सवाल को समीकरणों के निकाय में बदलिए और इस निकाय को मैट्रिक्स विधि से हल कीजिए और 1 पेन, 1 बैंग और पेंसिल बॉक्स की कीमत ज्ञात कीजिए।

12. दिये गए परिपथ में KCL & KVL के अनुप्रयोग से निम्न समीकरणें प्राप्त होती है। समीकरण निकाय $10\,I_3+5\,I_1=220$, $I_1+I_2=I_3$, $10\,I_3+20\,I_2=240$ को हल करके धारा I_1, I_2 तथा I_3 के मान



13. x,y,z में निम्न रेखिक समीकरण निकाय

$$(\sin 3\theta)\, x-y+z=0$$
$$(\cos 2\theta)\, x+4y+3z=0$$
$$2x+7y+7z=0$$

के सार्थक हल के लिये θ का मान ज्ञात कीजिए।

14. निम्न रेखिक समीकरण निकाय को आव्यूह की सहायता से हल कीजिए –

(i) $2x-y+3z=8$, $-x+2y+z=4$, $3x+y-4z=0$ (ii) $x+y+z=9$, $2x+5y+7z=52$, $2x+y-z=0$

15. गुणनफल $\begin{bmatrix} -4 & 4 & 4 \\ -7 & 1 & 3 \\ 5 & -3 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ ज्ञात कीजिए और इसका उपयोग कर समीकरण निकाय

$x-y+z=4$; $x-2y-2z=9$; $2x+y+3z=1$ को हल कीजिए।

16. निम्न मैट्रिक्सो की कोटि ज्ञात कीजिए।

(i) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (iii) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 3 \\ 3 & 9 & 12 & 3 \\ 1 & 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$ (iv) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$

17. A^{-1} ज्ञात कीजिए, यदि $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 4 & -3 & 2 \end{bmatrix}$ तथा निम्न आव्यूह समीकरण $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2y \\ z \\ 3y \end{bmatrix}$ को हल कीजिए।

18. समीकरणों की संगतता से सिद्ध कीजिए कि $bc+qr=ca+rp=ab+pq=-1$ हो, तो $\begin{vmatrix} ap & a & p \\ bq & b & q \\ cr & c & r \end{vmatrix} = 0.$

19. t के सभी मान ज्ञात कीजिए जिनके लिए समीकरण निकाय

$$(t-1)x+(3t+1)y+tz=0$$
$$(t-1)x+(4t-2)y+(t+3)z=0$$
$$2x+(3t+1)y+3(t-1)z=0$$

के अशून्य हल हैं और इस संदर्भ में $x : y : z$ अनुपात ज्ञात कीजिए, जहाँ t अपना न्यूनतम मान रखता है।

20. यदि t के विभिन्न मानों के लिए दिये गये समीकरण निकाय $(a-t)x+by+cz=0$, $bx+(c-t)y+az=0$ एवं $Cx+ay+(b-t)z=0$ के अशून्य हल हैं, तो प्रदर्शित कि t के इन मानों के गुणनफल को एक सारणिक के रूप में प्रदर्शित किया जा सकता है।

Exercise -3

3-A (स्तम्भ मिलान)

1. स्तम्भ I — स्तम्भ II

(A) $[1 \times 1]\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 3 & 2 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = 0$ हो, तो x= (p) 2

(B) यदि सारणिक $\begin{vmatrix} x & 3 & 3 \\ 3 & 3 & x \\ 2 & 3 & 3 \end{vmatrix}$ में $C_{11}=C_{22}$ हो, (q) -2

जहाँ C_{ij} अवयव a_{ij} का सहखण्ड है, तो x=

(C) सारणिक $\begin{vmatrix} \sin\theta & 1 & 0 \\ 1 & \cos\phi & -\cos\theta \\ \cos\phi & 0 & 1 \end{vmatrix}$ के न्यूनतम मान का निरपेक्ष मान है–

यदि सारणिक $\begin{vmatrix} \sin\theta & 1 & 0 \\ 1 & \cos\phi & -\cos\theta \\ \cos\phi & 0 & 1 \end{vmatrix}$ एक सममित सारणिक हो, (r) $\frac{5}{2}$

सारणिक का न्यूनतम मान का निरपेक्ष मान है–

(D) यदि $\begin{vmatrix} (b^2+c)^2 & a^2 & a^2 \\ b^2 & (c+a)^2 & b^2 \\ c^2 & c^2 & (a+b)^2 \end{vmatrix} = k\,abc\,(a+b+c)^3$ (s) $-\frac{9}{8}$

हो तो k का मान है –

2. स्तम्भ I — स्तम्भ II

(A) यदि A एक विषम क्रम की विषम सममित आव्यूह है, तब det(A) है। (p) 1

(B) यदि A एक लाम्बिक आव्यूह है, तब det(A) है। (q) 8

(C) यदि A तथा B दो प्रतिलोम आव्यूह इस प्रकार है कि AB=C तथा |A|=2, |C|=-2, तब det(B) है। (r) 0

(D) यदि $A=[a_{ij}]_{3\times3}$ एक अदिष आव्यूह है जहाँ $a_{11}=a_{22}=a_{33}=2$ तथा $A(\text{adj}A)=kI_3$ तब k है। (S) -1

3-B (कथन / कारण)

3. माना $A = \begin{bmatrix} 0 & (x_1 - x_2)^2 & (x_1 - x_3)^2 \\ (x_1 - x_2)^2 & 0 & (x_2 - x_3)^2 \\ (x_1 - x_3)^2 & (x_2 - x_3)^2 & 0 \end{bmatrix}$

कथन 1: यदि आव्यूह A के किन्ही दो भिन्न पंक्ति संदिषों का अदिष गुणनफल शून्य हो, तो A लाम्बिक होता है –

कथन 2: एक लाम्बिक आव्यूह के किन्ही दो भिन्न–भिन्न पंक्ति सदिषों का अदिष गुणनफल शून्य होता है –
(A) कथन 1 सत्य है, कथन 2 सत्य है तथा कथन 2, कथन 1 के लिए सही स्पष्टीकरण शून्य होता है –
(B) कथन 1 सत्य है, कथन 2 सत्य है तथा कथन 2, कथन 1 के लिए सही स्पषिकरण है।
(C) कथन 1 सत्य है, कथन 2 असत्य है।
(D) कथन 1 असत्य है, कथन 2 सत्य है।

4. **कथन 1** : यदि A^2-3A+2I=0 तब A, I या 2I या $\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ या $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$ के बराबर हो सकता है।

कथन 2 : यदि द्वितीय क्रम की वर्ग आव्यूह A के लिए, यदि $\det(A-xI)=ax^2+bx+c$ तब $aA^2+bA+cI=0$.
(A) कथन 1 सत्य है, कथन 2 सत्य है तथा कथन 2, कथन 1 के लिए सही स्पष्टीकरण शून्य होता है –
(B) कथन 1 सत्य है, कथन 2 सत्य है तथा कथन 2, कथन 1 के लिए सही स्पषिकरण है।
(C) कथन 1 सत्य है, कथन 2 असत्य है।
(D) कथन 1 असत्य है, कथन 2 सत्य है।

5. **कथन 1** : यदि $A = \begin{bmatrix} a^2 + x^2 & ab - cx & ac + bx \\ ab + xc & b^2 + x^2 & bc - ax \\ ac - bx & bc + ax & c^2 - x^2 \end{bmatrix}$ और $B = \begin{bmatrix} x & c & -b \\ -c & x & a \\ b & -a & x \end{bmatrix}$,तब $|A|=|B|^2$.

कथन 2 : यदि n क्रम की वर्ग आव्यूह A की सहखण्ड आव्यूह a^c हो, तब $|A^c|=|A|^{n-1}$.
(A) कथन 1 सत्य है, कथन 2 सत्य है तथा कथन 2, कथन 1 के लिए सही स्पष्टीकरण शून्य होता है –
(B) कथन 1 सत्य है, कथन 2 सत्य है तथा कथन 2, कथन 1 के लिए सही स्पषिकरण है।
(C) कथन 1 सत्य है, कथन 2 असत्य है।
(D) कथन 1 असत्य है, कथन 2 सत्य है।

8. **कथन 1** : यदि $A = \begin{bmatrix} 2 & 1+2i \\ 1-2i & 7 \end{bmatrix}$ तब det(A) वास्तविक है।

कथन 2 : यदि $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$, a_{ij} सम्मिश्र संख्याऐं हैं, तब det(A) हमेषा वास्तविक है –

(A) कथन 1 सत्य है, कथन 2 सत्य है तथा कथन 2, कथन 1 के लिए सही स्पष्टीकरण शून्य होता है –
(B) कथन 1 सत्य है, कथन 2 सत्य है तथा कथन 2, कथन 1 के लिए सही स्पषिकरण है।
(C) कथन 1 सत्य है, कथन 2 असत्य है।
(D) कथन 1 असत्य है, कथन 2 सत्य है।

3-C (अनुच्छेद)

7. **अनुच्छेद**

माना A, 2 या 3 क्रम का वर्ग आव्यूह है और I उसी क्रम का इकाई आव्यूह है तब आव्यूह $A-\lambda I$ को आव्यूह का A का लाक्षणिक आव्यूह (characteristic matrix) कहा जाता है। जहाँ λ एक सम्मिश्र संख्या है। लाक्षणिक आव्यूह की सारणिक को आव्यूह A की लाक्षणिक सारणिक कहा जाता है जो कि निष्चित रूप से 3 कोटि का λ में बहुपद होगा।

समीकरण $\det(A-\lambda I)=0$ को आव्यूह A का लाक्षणिक समीकरण कहा जाता है तथा इसके मूलों को लाक्षणिक मूल या आइगन मान कहा जाता है। यह मान है कि प्रत्येक वर्ग आव्यूह अपनी लाक्षणिक समीकरण को संतुष्ट करते हैं।

7.1 क्रम 3×3 की वर्ग मैट्रिक्स का एक आइगन मान शून्य हो, तब

(A) det A अषून्य होगा (B) det A शून्य होगा
(C) adj A शून्य आव्यूह होगा (D) इनमें से कोई नहीं

7.2 यदि A' आव्यूह A की परिवर्त को प्रदर्षित करता है तथा detA=1 तब det(A-I) बराबर होना चाहिए।

(A) 0 (B) -1 (C) 1 (D) इनमें से कोई नहीं

7.3 यदि $A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & -2 & 4\end{bmatrix}$, $I=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$ तथा $A^{-1}=\frac{1}{6}(A^2+cA+dI)$, तब c तथा d मान है।

(A) -6, -11 (B) 6, 11 (C) -6, 11 (D) 6,-11

8. **अनुच्छेद**

सारणिक $D=\begin{vmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}$, का प्रेक्षण करके हम इस निष्कर्ष पर पहुचते है कि D; $a_ib_jc_k(i\neq j\neq k)$ प्रकार के छः पदों का योग है। यह देखा जा सकता है कि 1, 2, 3 संख्याओं का प्रत्येक क्रमचय ठीक एक बार आता है। आधे पद धनातमक होगें, अन्य आधे पद ऋणात्मक होगे।

$D= a_1b_2c_3+a_2b_2c_3+a_3b_1c_2-(a_1b_3+a_3b_2c_1+a_2b_1c_3)$.

यह देखा जा सकता है कि प्रत्येक पद सारणिक के तीन अवयवों का गुणनफल है प्रत्येक अवयव एक बार धनात्मक क्षेत्र में तथा एक बार ऋणात्मक क्षेत्र में आता है। उपरोक्त सम्पूर्ण सिद्धान्त $n\times n$ $(n>3)$ क्रम की सारणिक पर भी लागू किया जा सकता है इसके अलावा n क्रम की अन्य वर्गआव्यूह A के लिए $\det(-A)=(-1)^n\det(A)$

8.1 माना किसी $n\times n$ क्रम के आव्यूह A का लाक्षणिक बहुपद $f(\lambda)$है। यदि ट्रेस (tr) A आव्युह A के विकर्ण के अवयवों का योग प्रदर्षित करता है, तब $f(\lambda)$में λ^{n-1} का गुणांक होगा।

(A) tr A (B) –tr A (C) $(-1)^{n-1}$trA (D) 2tr A

8.2 n^{th} क्रम की सारणिक के प्रसार में पदों की संख्या है।

(A) 4n-6 (B) 6(3n)-8 (C) ${}^nP_n$ (D) इनमें से कोई नहीं

8.3 दिये गये आव्यूह A में जिसके सभी अवयव वास्तविक है, तथा इस प्रकार है कि $A^2=-I$, तब det A बराबर होगा।

(A) -1 or 1, n $\rightarrow$ सम (B) 1, n $\rightarrow$ विषम (C) 0 (D) इनमें से कोई नहीं

3-D (सत्य/असत्य कथन)

9. माना a, b, c, d, u, v पूर्णाक है। यदि समीकरण निकाय ax+by=u, cx+dy=v का एक अद्वितीय परिमेय हल विद्यमान है, तो $ad-bc\neq0$

4x-5y-2z=2

10. समीकरण निकाय $5x-4y+2z=3$ असंगत है।
$2x+2y+8z=1$

11. एक मैट्रिक्स 'A' में 6 अवयव हैं, तो A के सभी संभव कमों (orders) की सख्ंख्या 6 है।

12. यदि सारणिक $A=\begin{bmatrix} x & 3 & 2 \\ 1 & y & 4 \\ 2 & 2 & z \end{bmatrix}$, $xyz=60$ और $8x+4y+3z=20$ हो, तो $A(\text{adj } A)$ $68I_2$ के बराबर है जहॉं I_2 द्वितीय कम की सारणिक है।

13. यदि समीकरण निकाय $ax+y+z=0$,. $x+by+z=0$ और $x+y+cz=0$ के लिए जहॉं $a, b, c \neq 1$, सार्थक $\frac{1}{1-a}+\frac{1}{1-b}+\frac{1}{1-c}$ का मान 1 है।

3-E(रिक्त स्थान की पूर्ति)

---

14. यदि $A=\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}$ हो और $AB=kB$ हो तो k का मान .... है।

15. माना A एक आव्यूह इस प्रकार है कि $A^2=A$ तथा $(I+A)^{10}=I+kA$, तब k= ....

16. यदि $\begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^4 \\ 1 & b^2 & b^4 \\ 1 & c^2 & c^4 \end{vmatrix}=k\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$ हो, तो k का मान .... है –

17. किसी 2×2 कम के मैट्रिक्स के लिए, यदि $A(\text{adj}A)=\begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}$ हो, तो $|A|=$

18. B'AB .... है, यदि A सममित हैं तथा B'AB .... है, यदि A विषम सममित है।

Exercise -4

4-A (पूर्ववती JEE परीक्षा प्रश्न)

IIT- JEE- 2008

1. निम्न समीकरण निकाय (system of equations) लीजिए

$$x-2y+3z=-1$$
$$-x+y-2z=k$$
$$x-3y+4z=1$$

कथन –1 : $k\neq3$ के लिए समीकरण निकाय का कोई हल नहीं है।
और

कथन – 2 : k≠3 के लिए सारणिक (determinant) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -1 & -2 & k \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$

(A) कथन 1 सत्य है, कथन 2 सत्य है तथा कथन 2, कथन 1 के लिए सही स्पष्टीकरण शून्य होता है –
(B) कथन 1 सत्य है, कथन 2 सत्य है तथा कथन 2, कथन 1 के लिए सही स्पषिकरण है।
(C) कथन 1 सत्य है, कथन 2 असत्य है।
(D) कथन 1 असत्य है, कथन 2 सत्य है।

2. निम्न रेखाएँ लीजिये

$L_1: x+3y-5=0$
$L_2: 3x-ky-1=0$
$L_3: 5x+2y-12=0$

कॉलम Column I में दिये गये प्रकथन/व्यंजकों का कॉलम Column II में दिये कथनों में सुमेल करें और अपना उत्तर ORS में दिया गया 4×4 मैट्रिक्स के उचित बुल्लों (bubbles) को काला करके दर्षाए

	कॉलम I	**कॉलम II**
(A)	L_1, L_2, L_3 संगामी है, यदि	(p) $k=-9$
(B)	L_1, L_2, L_3 में से एक, अन्य दो रेखाओं में से कम से कम एक के समान्तर है, यदि	(q) $k=-\frac{6}{5}$
(C)	L_1, L_2, L_3 एक त्रिभुज बनाती हैं, यदि	(B) $k=\frac{5}{6}$
(D)	L_1, L_2, L_3 कोई त्रिभुज नहीं बनाती है, यदि	(D) $k=5$

IIT- JEE-2006

3. **अनुच्छेद**

$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, यदि U_1, U_2, और U_3 स्तम्भ मैट्रिक्स हैं जो $AU_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $AU_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$ और $AU_3 \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ को संतुष्ट करते हैं

यदि U, 3×3 कम3 का मैटिक्स है जिसके स्तम्भ U_1, U_2, U_3 है, तो निम्न प्रश्नों के उत्तर दीजिए –

3.1 $|U|$ का मान है –
(A) 3 (B) -3 (C) 3/2 (D) 2

3.2 U^{-1} के अवयवों का योगफल है –
(A) -1 (B) 0 (C) 1 (D) 3

3.3 $[3\ 2\ 0]\ U \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ का मान है –

(A) [5] (B) $\begin{bmatrix} \frac{5}{2} \end{bmatrix}$ (C) [4] (D) $\begin{bmatrix} \frac{3}{2} \end{bmatrix}$

IIT – JEE – 2005

4. यदि $P = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ और $Q = PAP^T$ और $x = P^TQ^{2005}P$ हो, तो x =

(A) $\begin{bmatrix} 1 & 2005 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (B) $\begin{bmatrix} 4+2005\sqrt{3} & 6015 \\ 2005 & 4-2005\sqrt{3} \end{bmatrix}$

(C) $\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2+\sqrt{3} & 1 \\ -1 & -2\sqrt{3} \end{bmatrix}$ (D) $\frac{1}{4}\begin{bmatrix} 2005 & 2-\sqrt{3} \\ 2+\sqrt{3} & 2005 \end{bmatrix}$

IIT–JEE–2004

5. λ का मान जिसके लिए समीकरण निकाय 2x-y-z=12, x-2y+z=4, x+y+λz=4 का कोई हल नहीं है।
(A) 3 (B) -3 (C) 2 (D) -2

6. यदि मैट्रिक्स $A = \begin{bmatrix} \alpha & 2 \\ 2 & \alpha \end{bmatrix}$ के लिए $|A^3|=125$ हो, तो α का मान है –
(A) ±1 (B) ±4 (C) ±3 (D) ±2

7. यदि $A = \begin{bmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & b & d \\ 1 & c & c \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} a & 1 & 1 \\ 0 & d & c \\ f & g & h \end{bmatrix}$ $U = \begin{bmatrix} f \\ g \\ h \end{bmatrix}$, $V = \begin{bmatrix} a^2 0 \\ 0 \\ \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ आसैर AX=U के अनन्त हल है, तो सिद्ध कीजिए कि BX=V का कोई अद्वितीय हल नहीं हैं। यदि भी सिद्ध कीजिए कि यदि afd≠0, तो BX=V का कोई हल नहीं हैं।

IIT – JEE – 2003

8. यदि $A = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ और $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$ हो, तो α का मान जिसके लिए $A^2=B$ होगा। –

(A) 1 (B) -1 (C) 4 (D) कोई वास्तविक मान नहीं।

9. यदि $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{pmatrix}$, जहॉं a, b, c वास्तविक धनात्मक संख्याएँ हैं, abc=1 और $A^TA=I$ हो, तो $a^3+b^3+c^3$ का मान ज्ञात कीजिए।

IIT – JEE – 2002

10. माना $\omega = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$. तब सारणिक $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1-\omega^2 & \omega^2 \\ 1 & \omega^2 & \omega^4 \end{vmatrix}$ का मान है –

(A) 3ω (B) $3\omega(\omega-1)$ (C) $3\omega^2$ (D) $3\omega(1-\omega)$

IIT-JEE-2001

11. अन्तराल $-\frac{\pi}{4} \le x \le \frac{\pi}{4}$ में, सारणिक $\begin{vmatrix} \sin x & \cos x & \cos x \\ \cos x & \sin x & \cos x \\ \cos x & \cos x & \sin x \end{vmatrix} = 0$ के वास्तविक भिन्न–भिन्न हलों की संख्या है –

(A) 0 (B) 2 (C) 1 (D) 3

IIT-JEE-200

12. यदि समीकरण निकाय x-ky-z=0, ky-y-z=0, x+y-z=0 के अशून्य हल हैं, तो k के संभव मान है –

(A) -1, 2 (B) 1; 2 (C) 0, 1 (D) -1, 1

IIT-JEE-1999

13. यदि $f(x) = \begin{vmatrix} 1 & x & x+1 \\ 2x & x(x-1) & (x+1)x \\ 3x(x-1) & x(x-1)(x-2) & (x+1)x(x-1) \end{vmatrix}$ हो, तो f(100) का मान है –

(A) 0 (B) 1 (C) 100 (D) -100

14. θ के सभी मानों के लिए सिद्ध कीजिए कि $\begin{vmatrix} \sin\theta & \cos\theta & \sin 2\theta \\ \sin\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) & \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) & \sin\left(2\theta + \frac{4\pi}{3}\right) \\ \sin\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) & \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) & \sin\left(2\theta - \frac{4\pi}{3}\right) \end{vmatrix} = 0.$

IIT-JEE- 1998

15. यदि $\begin{vmatrix} 6i & -3i & 1 \\ 4 & 3i & -1 \\ 20 & 3 & i \end{vmatrix} = x + iy,$ तब

(A) x=3, y=1 (B) x=1, y=3 (C) x=0,y=3 (D) x=0,y=0

IIT-JEE- 1997

16. सारणिक $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ \cos(p-d)x & \cos px & \cos(p+d)x \\ \sin(p-d)x & \sin px & \sin(p+d)x \end{vmatrix}$ का मान निम्न में से किस प्राचल पर निर्भर नही करता है

(A) a (B) p (C) d (D) x

17. सारणिक $\begin{vmatrix} xp+y & x & y \\ yp+z & y & z \\ 0 & xp+y & yp+z \end{vmatrix} = 0$ यदि –

(A) x,y,z से.श्रे. में है। (B) x,y,z गु.श्रे. में है। (C) x,y,z ह.श्रे. में है। (D) xy,yz,zx स.श्रे. में है।

18. यदि A और B समान प्रकार की वर्ग मैट्रिक्स है, तो

(A) A+B=B+A (B) A+B=A-B (C) A-B=B-A (D) AB=BA

19. यदि एक हरात्मक श्रेढ़ी के p वां , q वां तथा r वां पद क्रमषः a,b, एवं c हो, तो सारणिक $\begin{vmatrix} bc & ca & ab \\ p & q & r \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ का मान ज्ञात कीजिए।

IIT-JEE- 1996

20. माना a>0,d>0 सारणिक $\begin{vmatrix} \frac{1}{a} & \frac{1}{a(a+d)} & \frac{1}{(a+d)(a+2d)} \\ \frac{1}{(a+d)} & \frac{1}{(a+d)(a+2d)} & \frac{1}{(a+2d)(a+3d)} \\ \frac{1}{(a+2d)} & \frac{1}{(a+2d)(a+3d)} & \frac{1}{(a+3d)(a+4d)} \end{vmatrix}$ का मान ज्ञात कीजिए।

IIT-JEE- 1995

21. माना a,b,c धनात्मक संख्याएँ x,y & z में समीकरण निकाय
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$; $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$; $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ का है –

(A) कोई हल नहीं (B) अद्वितीय हल (C) अनन्त हल (D) कई हल

22. θ का 0 एवं $\frac{\pi}{2}$ के मध्य मान जो समीकरण $\begin{vmatrix} 1+\sin^2\theta & \cos^2\theta & 4\sin 4\theta \\ \sin^2\theta & 1+\cos^2\theta & 4\sin 4\theta \\ \sin^2\theta & \cos^2\theta & 1+4\sin 4\theta \end{vmatrix} = 0$ को संतुष्ट करते हैं, है –

(A) $\frac{7\pi}{24}$ or $\frac{11\pi}{24}$ (B) $\frac{7\pi}{24}$ and $\frac{5\pi}{24}$ (C) $\frac{5\pi}{24}$ and $\frac{\pi}{24}$ (D) इनमें से कोई नहीं

23. यदि $\omega(\neq 1)$ इकाई का एक घनमूल है, तब $\begin{vmatrix} 1 & 1+i+\omega^2 & \omega^2 \\ 1-i & -1 & \omega^2-1 \\ -i & -i+\omega-1 & -1 \end{vmatrix}$ बराबर है –

(A) 0 (B) 1 (C) i (D) ω

IIT-JEE- 1994

24. यदि $a_1, a_2, a_3, \ldots\ldots$ गुणोत्तर श्रेढ़ी में है तथा सभी $i \geq 1$ के लिए $a_i > 0$ तब

$$\Delta = \begin{vmatrix} \log a_m & \log a_{m+1} & \log a_{m+2} \\ \log a_{m+3} & \log a_{m+4} & \log a_{m+5} \\ \log a_{m+6} & \log a_{m+7} & \log a_{m+8} \end{vmatrix}$$ बराबर है –

(A) $\log a_{m+8} - \log a_m$ (B) $\log a_{m+8} + \log a_m$ (C) 0 (D) $(\log a_{m+4})^2$

25. सिद्ध कीजिए कि $\begin{vmatrix} \cos(A-P) & \cos(A-Q) & \cos(A-R) \\ \cos(B-P) & \cos(B-Q) & \cos(B-R) \\ \cos(C-P) & \cos(C-Q) & \cos(C-R) \end{vmatrix} = 0$

4-B (पूर्ववर्ती AIEEE/DCE परीक्षा प्रश्न)

26. माना $A = \begin{bmatrix} 5 & 5\alpha & \alpha \\ 0 & \alpha & 5\alpha \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ यदि $|A^2|=25$, तब $|\alpha|$ बराबर है

(A) 5^2 (B) 1 (C) $\frac{1}{5}$ (D) 5

27. यदि A तथा B आकार $n \times n$ की दो वर्ग आव्यूह इस प्रकार है कि $A^2-B^2=(A-B)(A+B)$, तब निम्न में से कोनसा कथन हमेषा सत्य होगा।

(A) AB=BA (B) या तो A या B शून्य आव्यूह है

(C) या तो A या B तत्समक आव्यूह है (D) A=B

28. यदि $A^2-A+I=0$ तब A का प्रतिलोम हैं –

(A) I-A (B) A-I (C) A (D) A+I

29. यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ और $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ तब गणितीय आगमन सिद्धान्त के अनुसार निम्नलिखित में से कौनसा $n \geq 1$ के लिए सदैव सत्य है।

(A) $A^n=2^{n-1}A+(n-1)I$ (B) $A^n=nA+(n-1)I$

(C) $A^n=2^{n-1}A-(n-1)I$ (D) $A^n=nA-(n-1)I$

30. समीकरण निकाय $\alpha x+y+z=\alpha-1$, $x+\alpha y+z=\alpha-1$, $x+y+\alpha z=\alpha-1$ का कोई हल नहीं है यदि α है।

(A) 1 (B) -2 नहीं (C) या तो -2 या 1 (D) -2.

31. माना $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ आव्यूह A के लिए केवल सत्य कथन है –

(A) A शून्य आव्यूह है (B) A=(-1)I, जहाँ I एक इकाई आव्यूह है।

(C) A^{-1} अस्तित्व नहीं करता है। (D) $A^2=I$

32. माना $A=\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & 1 & -3\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix}$ और $(10)B=\begin{bmatrix}4 & 2 & 2\\ -5 & 0 & \alpha\\ 1 & -2 & 3\end{bmatrix}$ यदि B आव्यूह A का प्रतिलोम है, तब α है –

(A) -2 (B) 1 (C) 2 (D) 5

33. यदि $A=\begin{bmatrix}a & b\\ b & a\end{bmatrix}$ और $A^2=\begin{bmatrix}\alpha & \beta\\ \beta & \alpha\end{bmatrix}$ तब

(A) $\alpha=a^2+b^2,\ \beta=ab$ (B) $\alpha=a^2+b^2,\ \beta=2ab$

(C) $\alpha=a^2+b^2,\ \beta=a^2-b^2$ (D) $\alpha=2ab,\ \beta=a^2+b^2$

34. यदि $A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}$, I क्रम 2 की इकाई आव्यूह है तथा a,b स्वेच्छ नियतांक है, तब $(aI+bA)^2$ बराबर है ?

(A) a^2I+b^2A (B) $a^2I=abA$ (C) $a^2I+2abA$ (D) इनमें से कोई नहीं

35. यदि $A=\begin{bmatrix}ab & b^2\\ -a^2 & -ab\end{bmatrix}$, तब A

(A) शून्यभावी (B) अन्तर्वलनीय (C) वर्गसम (D) अदिष

36. यदि A, 3×4 क्रम का आव्यूह है तथा B एक आव्यूह इस प्रकार है कि A'B तथा BA' दोनों परिभषित है, तब B का क्रम है।

(A) 4×4 (B) 3×3 (C) 3×4 (D) 4×3

37. यदि A n क्रम की अव्युत्क्रमणीय आव्यूह है तब A(adj A) बराबर है।

(A) शून्य आव्यूह (B) पंक्ति आव्यूह (C) तत्समक आव्यूह (D) इनमें से कोई नहीं

38. A तथा B, 3×3 के आव्यूह हैं तब AB=0 का अर्थ है –

(A) A=0 और B=0 (B) |A|=0 और |B|=0 (C) या तो |A| या |B|=0 (D) A=0 या B=0.

Answers

EXERCISE # 1-A

1. C 2. A 3. D 4. A 5. B 6. C 7. A 8. D 9. D 10. A 11. D 12. B 13. C 14. B 15. A 16. A 17. B 18. B 19. C 20. A 21. AC 22. C 23. D 24. C 25. A 26. B 27. D

28. B 29. A 30. D 31. C 32. AC 33. A

34. ABC 35. ABCD 36. AB 37. ABD 38. AC

39. C

EXERCISE # 1-B

1. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$ 2. (x, y, z, w)=(1, 2, 4, 5)

3. $AB = \begin{bmatrix} 18 & -11 & 10 \\ -16 & 47 & 10 \\ 62 & -23 & 42 \end{bmatrix}$, $BA = \begin{bmatrix} 49 & 24 \\ -7 & 58 \end{bmatrix}$

8. (i) $M_{11}=4$, $M_{12}=-3$, $M_{21}=2$, $M_{22}=1$
(ii) $M_{11}=-12$, $M_{12}=2$, $M_{13}=23$
M_{21}-16, $M_{22}=-4$, $M_{23}=14$
$M_{31}=-4$, $M_{32}=-6$, $M_{33}=11$

9. $0, \frac{3\pi}{4}, \pi$

10. (i) $C_{11}=4$, $C_{12}=-2$, $C_{21}=3$, C22=1.
(ii) $C_{11}=7$, $C_{12}=1$, $C_{13}=5$, $C_{21}=6$,
$C_{22}=3$, $C_{23}=5$, $C_{31}=-2$, $C_{32}=-1$,
$C_{33}=0$.

11. (i) 0 (ii) 0 (iii) 0 (iv) $5(3\sqrt{2}-5\sqrt{3})$

14. (i) x=-2 b/a (ii) 4 17. A=0, B=0

20. (ii) $|A|^{(n-1)^3}$ 21. a=-4, b=1, $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$

22. $\begin{bmatrix} 9 & -3 & 5 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ 23. $\begin{bmatrix} -191 & -110 \\ 77 & 44 \end{bmatrix}$

25. (i) x=3, y=4, z=6

(ii) $x = \frac{13}{3}$, $y = -\frac{7}{6}$, $z = -\frac{35}{6}$

26. (a) $\lambda \neq 3$ (b) $\lambda=3, \mu=10$ (c) $\lambda=3, \mu \neq 10$

27. x=-7, y=-4

28. for c=0, x=-3, y=3; for c=-10, $x = -\frac{1}{2}$, $y = \frac{4}{3}$

EXERCISE # 2-A

1. B 2. B 3. D 4. A 5. D 6. A 7. A

8. D 9. A 10. A 11. C 12. B 13. A 14. A

15. C 16. B 17. C 18. A 19. B 20. B 21. B

22. C 23. D 24. A 25. A 26. D 27. C

28. ABC 29. BD 30. AB 31. B 32. AB 33. BC

34. B 35. BC 37. AC

EXERCISE # 2-B

1. $y \varepsilon R$ 9. $A^{-1} = \frac{2}{39}\begin{bmatrix} 26 & -13 & 13 \\ -17 & 10 & -1 \\ 7 & -11 & 5 \end{bmatrix}$

10. $\alpha \in R - \left\{0, \frac{6}{5}\right\}$, $A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -15 & 6 & -5 \\ 5 & -2 & 2 \end{bmatrix}$

11. Rs. 2, Rs. 15. & Rs. 5

12. $I_1=12A$, $I_2=4A$, $I_3=16A$

13. $\theta = n\pi, n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{6}; n \in I$

14. (i) x=2; y=2; z=2 (ii) x=1; y=3; z=5

15. x=3; y=-2; z=-1

16. (i) 2 (ii) 3 (iii) 3 (iv) 2

17. x=1; y=2; z=3, $A^{-1} = \frac{1}{17}\begin{bmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 8 & 6 & -9 \\ 10 & -1 & -7 \end{bmatrix}$

19 t=0 or 3; x: y: z=1: 1: 1   20. $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$

EXERCISE # 3

1. (A) $\to$ (s), (B) $\to$ (r), (C) $\to$ (p), (D) $\to$ (p)

2. (A) $\to$ (r), (B) $\to$ (p, s), (C) $\to$ (s), (D) $\to$ (q)

3. D 4. B 5. A 6. C 7.1 B 7.2 A 7.3 C

8.1 C 8.2 C 8.3 A 9. True 10. True

11. False 12. False 13. True 14. 3 15. 1023

16. (a+b) (b+c) (c+a) 17. 10

18. सममित, विषय सममित

EXERCISE # 4

1. A

2. (A) $\to$ (s), (B) $\to$ (p,q), (C) $\to$ (r) (D) $\to$ (p,q,s)

3.1 A 3.2 B 3.3 A 4. A 5. D 6. C 8. D

9. 4 10. B 11. C 12. D 13. A 15. D 16. B

17. B 18. A 19. 0

20. $\frac{4d^4}{a(a+d)^2(a+2d)^3(a+3d)^2(a+4d)}$ 21. B 22. A

23. A 24. C 26. C 27. A 28. A 29. D 30. D

31. D 32. D 33. B 34. C 35. A 36. C 37. A

38. C

MQB

EXRECISE # 1 (बहुविकल्पीय प्रश्न)

केवल एक विकल्प सही

1. एक ऊपरी त्रिभुजाकार मैट्रिक्स $A=[A_{ij}]_{n\times n}$ में अवयव $a_{ij}=0$ होता है –
   (A) i<j के लिये (B) i=j के लिये (C) i=j के लिये (D) $i \geq j$ के लिये
2. यदि A और B दो मैट्रिक्स हो, तो –
   (A) AB=BA (B) AB=O
   (C) AB=I (D) AB का परिभाषित होना आवश्यक नहीं
3. निम्न में से कौनसी मैट्रिक्स प्रतिलोमीय नहीं हैं –
   (A) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (B) $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$ (C) $\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ (D) $\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$
4. समीकरण निकाय 2x+y=4, 3x+2y=2, x+y=-2 के लिए
   (A) कोई हल विद्यमान नहीं है (B) एक हल विद्यमान है
   (C) दो हल विद्यमान है (D) अनन्त हल विद्यमान है
5. यदि I_n ,n क्रम की इकाई मैट्रिक्स हो, तो $(I_n)^{-1}$=

(A) विद्यमान नहीं हैं (B) I_n (C) O (D) nI_n

6. यदि A और B (A≠B), n क्रम की सममित मैट्रिक्स हो, तो –
(A) A+B विषम सममित है। (B) A+B सममित है।
(C) A+B विकर्ण मैट्रिक्स है। (D) A+B शून्य मैट्रिक्स है।

7. माना A एक वर्ग मैट्रिक्स है, तो निम्न में से कौनसी सममित मैट्रिक्स नहीं हैं –
(A) A+A' (B) A'A (C) AA' (D)A-A'

8. यदि $[1\times1]\begin{bmatrix}1&3&2\\0&5&1\\0&3&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\1\\-2\end{bmatrix}=0$ हो, तो x है –
(A) $-\frac{1}{2}$ (B) $\frac{1}{2}$ (C) 1 (D)-1

9. यदि $A=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&0&0\\1&0&1\end{bmatrix}$ हो, तो $A^2=$
(A) A (B) -A (C) 2A (D) -2A

10. यदि A और B दो मैट्रिक्स इस प्रकार है कि AB=B और BA=A, तो A^2+B^2
(A) 2AB (B) 2BA (C) A+B (D) AB

11. यदि $A=\begin{bmatrix}1&-1\\2&1\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}a&1\\b&-1\end{bmatrix}$ और $(A+B)^2=A^2+B^2+2AB$ हो, तो a और b के मान होगें –
(A) a=1, b=-2 (B) a=1, b=2 (C) a=-1, b=2 (D) a=-1, b=-2

12. यदि $A=\begin{bmatrix}3&1&-1\\0&1&2\end{bmatrix}$ हो, तो AA'
(A) सममित मैट्रिक्स (B) विषम सममित मैट्रिक्स (C) लाम्बिक मैट्रिक्स (D) इनमें से कोई नहीं

13. समीकरण निकाय x+y+z=8, x-y+2z=6, 3x+5y-7z=14 का –
(A) अद्वितीय हल होगा। (B) अनन्त हल होंगे। (C) कोई हल नहीं है। (D) इनमें से कोई नहीं।

14. माना कोटि r का मैट्रिक्स A है, तो
(A) कोटि $(A^T)=r$ (B) कोटि $(A^T)<r$ (C) कोटि $(A^T)>r$ (D) इनमें से कोई नहीं

15. यदि ω इकाई का घनमूल हैं और $A=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&\omega&\omega^2\\1&\omega^2&\omega\end{bmatrix}$ हो, तो $A^{-1}=$
(A) $A=\begin{bmatrix}1&\omega&\omega^2\\\omega^2&1&\omega\\\omega&\omega^2&1\end{bmatrix}$ (B) $\frac{1}{3}\begin{bmatrix}1&1&1\\1&\omega^2&\omega\\1&\omega&\omega^2\end{bmatrix}$ (C) $\begin{bmatrix}1&\omega&\omega^2\\1&\omega^2&\omega\\1&1&1\end{bmatrix}$ (D) $\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1&\omega&\omega^2\\1&\omega^2&\omega\\1&1&1\end{bmatrix}$

16. यदि $A=\begin{bmatrix}a&0&0\\0&b&0\\0&0&c\end{bmatrix}$ हो, तो $A^{-1}=$

(A) $\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$ (B) $\begin{bmatrix} -a & 0 & 0 \\ 0 & -b & 0 \\ 0 & 0 & -c \end{bmatrix}$ (C) $\begin{bmatrix} 1/a & 0 & 0 \\ 0 & -b & 0 \\ 0 & 0 & -c \end{bmatrix}$ (D) इनमें से कोई नहीं

17. माना कि $A = \begin{bmatrix} x+\lambda & x & x \\ x & x+\lambda & x \\ x & x & x+\lambda \end{bmatrix}$ हो, तो A^{-1} विद्यमान हैं यदि –

(A) $x \neq 0$ (B) $\lambda \neq 0$ (C) $3x+\lambda \neq 0, \lambda \neq 0$ (D)

18. माना कि $A = \begin{bmatrix} 1 & \sin\theta & 1 \\ -\sin\theta & 1 & \sin\theta \\ -1 & -\sin\theta & 1 \end{bmatrix}$ जहाँ $0 \geq \theta < 2\pi$ हो, तो –

(A) Det (A)=0 (B)Det $A \in (0,\infty)$ (C) Det (A) $\in [2, 4]$ (D) Det A $\in [2, \infty)$

19. यदि $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & a & 1 \end{bmatrix}, A^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ -4 & 3 & c \\ 5/2 & -3/2 & 1/2 \end{bmatrix}$ हो, तो –

20. यदि A और B दो वर्ग मैट्रिक्स इस प्रकार हैं कि $B=-A^{-1}BA$, तो $(A+B)^2=$

(A) 0 (B) A^2+B^2 (C) $A^2+2AB+B^2$ (D) A+B

21. सारणिक $\begin{vmatrix} b+c & a & a \\ b & c+a & b \\ c & c & a+b \end{vmatrix} =$

(A) 2abc (B) 3 abc (C) 4 abc (D) इनमें से कोई नहीं

22. यदि $\begin{vmatrix} x^k & x^{k+2} & x^{k+3} \\ y^k & y^{k+2} & y^{k+3} \\ z^k & z^{k+z} & z^{k+3} \end{vmatrix} = (x-y)(y-z)(z-x)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)$ हो, तो :

(A) k=-3 (B) k=-1 (C) k=1 (D) k=3

23. यदि सारणिक $\begin{vmatrix} a+p & \ell+x & u+f \\ b+q & m+y & v+g \\ c+r & n+z & w+h \end{vmatrix}$ को 3 कम के K सारणिक में प्रसारित कर दिया जाये जिसका प्रत्येक अवयव केवल एक पद रखता है तो K=

(A) 6 (B) 7 (C) 8 (D) 9

24. यदि a, b, c भिन्न–भिन्न है, तथा सारणिक $\begin{vmatrix} a & a^3 & a^{4-1} \\ b & b^3 & b^{4-1} \\ c & c^3 & c^{4-1} \end{vmatrix} = 0$ हो, तो –

(A) abc (ab+bc+ca) = a+b+c (B) (a+b+c) (ab+bc+ca) = abc

(C) abc (a+b+c) = ab+bc ca (D) इनमें से कोई नहीं

25. यदि समीकरण निकाय $x+\lambda y+2=0$, $\lambda x+y-2=0$, $\lambda x+\lambda y+3=0$ संगत हो, तो
(A) $\lambda=\pm 1$ (B) $\lambda=-1$ (C) $\lambda=1, -2$ (D) $\lambda=-1, 2$

26. यदि $f(\theta)=\begin{vmatrix} \cos^2\theta & \cos\theta\sin\theta & -\sin\theta \\ \cos\theta\sin\theta & \sin^2\theta & \cos\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta & 0 \end{vmatrix}$ हो, तो $f\left(\frac{\pi}{6}\right)=$
(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) इनमें से कोई नहीं

27. यदि $f(x)=\begin{vmatrix} a & -1 & 0 \\ ax & a & -1 \\ ax^2 & ax & a \end{vmatrix}$ हो, तो बहुपद $f(x)-f(-x)$ की घात है –
(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 0

28. यदि a, b, c सम्मिश्र संख्याएँ हो, तो $z=\begin{vmatrix} 0 & \bar{b} & -c \\ \bar{b} & 0 & -a \\ \bar{c} & \bar{a} & 0 \end{vmatrix}$ है –
(A) विषुद्ध वास्तविक (B) विषुद्ध काल्पनिक (C) 0 (D) इनमें से कोई नहीं

29. यदि n, 3 का गुणक नहीं है तथा 1, ω, ω^2 इकाई के घनमूल हैं, तो $\Delta=\begin{vmatrix} 1 & \omega^n & \omega^{2n} \\ \omega^{2n} & 1 & \omega^n \\ \omega^n & \omega^{2n} & 1 \end{vmatrix}=$
(A) 0 (B) ω (C) ω^2 (D) 1

30. यदि $f(x)=\log_{10}x$ तथा $g(x)=e^{i\pi x}$ तथा $h(x)=\begin{vmatrix} f(x)g(x) & [f(x)]^{g(x)} & 1 \\ f(x^2)g(x^2) & [f(x^2)]^{g(x^2)} & 0 \\ f(x^3)g(x^3) & [f(x^3)]^{g(x^3)} & 1 \end{vmatrix}$ हो, तो h(10) का मान है –
(A) 0 (B) 2 (C) 1 (D) 4

31. माना m एक धनात्मक पूर्णांक है, एवं $D_r=\begin{vmatrix} 2r-1 & {}^mC_r & 1 \\ m^2-1 & 2^m & m+1 \\ \sin^2(m^2) & \sin^2(m) & \sin^2(m+1) \end{vmatrix}$ $(0\le r\le m)$ हो, तो $\sum_{r=0}^{m} D_r$ का मान है –
(A) 0 (B) m^{2-1} (C) 2^m (D) $2^m\sin^2(2^m)$

32. यदि a, b, c वास्तविक संख्याएँ हो और $D=\begin{vmatrix} a & 1+2i & 3-5i \\ 1-2i & b & -7-3i \\ 3+5i & -7+3i & c \end{vmatrix}$ हो, तो D है –
(A) विषुद्ध वास्तविक (B) विषुद्ध काल्पनिक (C) अवास्तविक (D) पूर्णांक

33. माना a, b, c धनात्मक संख्याएँ हैं, तो x, y एवं z में निम्नलिखित समीकरण निकाय

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$; $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$; $-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ का –

(A) कोई हल नहीं है। (B) अद्वितीय हल है। (C) अनन्त हल हैं। (D) सीमित हल हैं।

एक से अधिक विकल्प सही

34. यदि $f(x)=\begin{vmatrix} 2\sin x & \sin^2 x & 0 \\ 1 & 2\sin x & \sin^2 x \\ 0 & 1 & 2\sin x \end{vmatrix}$ हो, तो

(A) f(x), x से स्वतंत्र है। (B) $f'(\pi/2)=0$

(C) $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(x)dx=0$ (D) x=0 पर वक्र y=f(x) की स्पर्ष रेखा y=0

35. माना $\Delta=\begin{vmatrix} a & -1 & 0 \\ ax & a & -1 \\ ax^2 & ax & a \end{vmatrix}$ हो, तो

(A) x+a, Δ का एक गुणनखण्ड है। (B) $(x+a)^2$, Δ का एक गुणनखण्ड है।
(C) $(x+a)^3$, Δ का एक गुणनखण्ड है। (D) $(x+a)^4$, Δ का एक गुणनखण्ड नहीं हैं।

36. यदि $\Delta=\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ x^2 & 1 & x \\ x & x^2 & 1 \end{vmatrix}$ हो, तो –

(A) $1-x^3$, Δ का एक गुणनखण्ड है। (B) $(1-x^3)^2$, Δ का एक गुणनखण्ड है।

(C) Δ(x)=0 के 4 वास्तविक मूल है। (D) $\Delta'(1)=0$

37. माना $f(x)=\begin{vmatrix} 1/x & \log x & x^n \\ 1 & -1/n & (-1)^n \\ 1 & a & a^2 \end{vmatrix}$, हो, तो

(A) $f^n(1)$, a से स्वतंत्र है।
(B) $f^n(1)$, n से स्वतंत्र
(C) $f^n(1)$, a एवं n पर निर्भर करता हैं
(D) $y=a(x-f^n(1))$ एक सरल रेखा को प्रदर्षित करता है जो मूल बिन्दु से गुजरती है।

38. माना $f(x)=\begin{vmatrix} 2\cos x & 1 & 0 \\ 1 & 2\cos x & 1 \\ 0 & 1 & 2\cos x \end{vmatrix}$ हो, तो

(A) $\int_0^{\pi} f(x)dx=0$ (B) f(x) का अधिकतम मान 4 हैं।

(C) $\lim_{x\to\pi/2} f(x)=0$ (D) $f'(0)=0$

EXRECISE # 2 (विषयात्मक प्रश्न)

1. यदि $f(x)=x^2-5x+7$ हो तो $f(A)$ ज्ञात कीजिए, जहाँ $A=\begin{bmatrix}3 & 1\\ -1 & 2\end{bmatrix}$.

2. यदि $A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & 2 & 1\\ 2 & 0 & 3\end{bmatrix}$ हो, तो प्रदर्षित कीजिए कि मैट्रिक्स A बहुपद $x^3-6x^2+7x+2I$ का एक मूल हैं।

3. मैट्रिक्स $A=\begin{bmatrix}-1 & 2 & 5\\ 2 & -3 & 1\\ -1 & 1 & 1\end{bmatrix}$ के लिए A^{-1} ज्ञात कीजिए तथा निम्न समीकरण निकाय को हल कीजिए :
$-x+2y+5z=2;\ 2x-3y+z=15$ एवं $x+y+z=-3$

4. 5000 रू. की एक राषि को तीन भागों में कमषः ब्याज दरों 6%, 7%, 8% प्रतिवर्ष से जमा किया जाता हैं। साल की कुल कमाई 358 रूपये हैं। यदि पहले दो जमा से प्राप्त कुल रूपये, तीसरे जमा से प्राप्त रूपयों से 70 अधिक है, तो प्रत्येक जमा की राषि मैट्रिक्स विधि से ज्ञात कीजिए।

5. यदि $A=\begin{bmatrix}1 & -2 & 0\\ 2 & 1 & 3\\ 0 & -2 & 1\end{bmatrix}$ हो, तो A^{-1} ज्ञात कीजिए। A^{-1} का उपयोग करके निम्न समीकरण निकाय को हल कीजिए :
$x-2y=10,\ 2x+y+3z=8,\ -2y+z=7.$

6. यदि $A=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 2 & -1\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}a & 1\\ b & -1\end{bmatrix}$ और $(A+B)^2=A^2+B^2$ हो, तो a और b ज्ञात कीजिए।

7. मैट्रिक्स सिद्धान्त का उपयोग करके प्रदर्षित कीजिए कि निम्न समीकरण निकाय के अनन्त हल हैं –
$5x+3y+7z=4;\ 3x+26y+2z=9;\ 7x+2y+10z=5.$

8. सिद्ध कीजिए कि : $\Delta=\begin{vmatrix}\beta\gamma & \beta\gamma'+\beta'\gamma & \beta'\gamma'\\ \gamma\alpha & \gamma\alpha'+\gamma'\alpha & \gamma'\alpha'\\ \alpha\beta & \alpha\beta'+\alpha'\beta & \alpha'\beta'\end{vmatrix}=(\alpha\beta'-\alpha'\beta)(\beta\gamma'-\beta'\gamma)(\gamma\alpha'-\gamma'\alpha)$

9. यदि $ax_1^2+by_1^2+cz_1^2=d$, $ax_2^2+by_2^2+cz_2^2=d$, $ax_3^2+by_3^2+cz_3^2=d$ और $ax_2x_3+by_2y_3+cz_2z_3=f$, $ax_3x_1+by_3y_1+cz_3z_1=f$, $ax_1x_2+by_1y_2+cz_1z_2=f$

सिद्ध कीजिए कि $\begin{vmatrix}x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\\ 3x & y_3 & z_2\end{vmatrix}^2=(d-f)^2\ \dfrac{d+2f}{abc}$, जहाँ a, b, c≠0.

10. यदि $(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2=a^2$, $(x_2-x_3)^2+(y_2-y_3)^2=b^2$, $(x_3-x_1)^2+(y_3-y_1)^2=c^2$ हो, तो सिद्ध कीजिए कि $4\begin{vmatrix}x_1 & y_1 & 1\\ x_2 & y_2 & 1\\ x_3 & y_3 & 1\end{vmatrix}^2$
$=(a+b+c)\ (b+c-a)\ (c+a-b)\ (a+b-c).$

11. यदि $y=\dfrac{u}{v}$, जहाँ u और v. 'x' के फलन हो, तो प्रदर्षित कीजिए कि : $v^3\dfrac{d^2y}{dx^2}=\begin{vmatrix}u & v & 0\\ u' & v' & v\\ u'' & v'' & 2v'\end{vmatrix}$

12. यदि α, β समीकरण $ax^2+bx+c=0$ के वास्तविक मूल है और $s_n=\alpha^n+\beta^n$ हो, तो सिद्ध कीजिए कि $as_n+bs_{n-1}+cs_{n-2}=0$, जहाँ $n\geq 2,\ n\in N$ I तथा इससे a, b, c के सभी वास्तविक मानों के लिए सिद्ध कीजिए कि

$$\begin{vmatrix} 3 & 1+s_1 & 1+s_2 \\ 1+s_1 & 1+s_2 & 1+s_3 \\ 1+s_2 & 1+s_3 & 1+s_4 \end{vmatrix} \geq 0,$$

13. यदि $a > 0, d > 0$ हो, तो सारणिक $\begin{vmatrix} \frac{1}{a} & \frac{1}{a(a+d)} & \frac{1}{(a+d)(a+2d)} \\ \frac{1}{(a+d)} & \frac{1}{(a+d)(a+2d)} & \frac{1}{(a+2d)(a+3d)} \\ \frac{1}{(a+2d)} & \frac{1}{(a+2d)(a+3d)} & \frac{1}{(a+3d)(a+4d)} \end{vmatrix}$ का मान ज्ञात कीजिए।

14. सारणिक का उपयोग करके निम्न समीकरणों को हल कीजिए –

$x+2y+3z=6$
$2x+4y+z=17$
$3x+2y+9z=2$

Answers

EXERCISE # 1

1. C 2. D 3. B 4. B 5. B 6. B 7. D
8. B 9. C 10. C 11. D 12. A 13. A 14. A
15. B 16. C 17. C 18. C 19. A 20. B 21. C
22. B 23. C 24. A 25. B 26. B 27. A 28. B
29. A 30. A 31. A 32. A 33. D 34. BCD
35. ABD 36. ABD 37. ABD 38. ABCD

EXERCISE -2

1. f(A)=0

3. $A^{-1} = -\frac{1}{7}\begin{bmatrix} -4 & 3 & 17 \\ -3 & 4 & 11 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$ & x=2, y=-3, z=2

4. Rs 1000, Rs 2200 and Rs 1800

5. x=4, y=-3 & z=1 6. a=1, b=4

13. $\dfrac{4d^4}{a(a+d)^2(a+2d)^3(a+3d)^2(a+4d)}$

14. x=1, y=4, z=-1